

Dominando o CÁLCULO

Apostila de Aulas

Tem Ciência

Professor Daniel Nunes

"O milagre da adequação da linguagem matemática à formulação das leis da física é um presente maravilhoso que nós não entendemos nem merecemos"

Eugene Wigner

"A coisa mais incompreensível sobre o mundo é que ele é compreensível"

Albert Einstein

Prefácio

Olá!



É uma grande honra para mim poder te guiar como seu professor no incrível mundo do Cálculo, onde a matemática encontra o imenso poder do infinito. Nesse curso, você terá acesso a algumas das maiores ideias da história da humanidade. O Cálculo foi o responsável por abrir possibilidades antes inimagináveis para a ciência, resultando em grandes avanços científicos que mudaram para sempre o nosso mundo.

A jornada de aprendizado do Cálculo é longa, e existe uma grande diferença entre a matemática elementar - aquela do ensino médio - e a matemática superior, que se inicia com o estudo do Cálculo. Construir uma base sólida em Cálculo é o principal objetivo desse curso, e isso será de extrema utilidade para todos os estudos de nível superior que você faça a partir daqui - já que o Cálculo é a base de grande parte da matemática de nível universitário.

Porém, este curso começa no Pré-Cálculo, que é uma grande revisão de conteúdos do ensino médio e que são indispensáveis para o aprendizado do Cálculo. Isso porque o conhecimento matemático se constrói em camadas, e para o Cálculo é necessária uma base forte no Pré-Cálculo - e quanto mais forte essa base, mais fácil será para você lidar com o Cálculo.

Por isso seus estudos devem começar pelo Pré-Cálculo. Não negligencie isso! Você pode fazer nem que seja uma rápida revisão de alguns tópicos em que não esteja com tanta segurança. O melhor meio de saber o que deve estudar é fazendo os exercícios de Pré-Cálculo. Agora, se você deseja um aprofundamento teórico no Cálculo, fica o alerta de que você deve estudar a aula sobre o Axioma do Supremo, que acabou ficando na parte de Números do Pré-Cálculo nesta apostila.

Nunca é demais dizer: faça muitos exercícios: eles são a melhor forma de aprender matemática. Afinal, você não aprende matemática olhando, e sim fazendo - e é através dos exercícios que você "faz" matemática. As aulas servem para te guiar e te dar as ferramentas necessárias para você construir o seu conhecimento.

Veja bem o que eu disse: **VOCÊ CONSTRÓI O SEU CONHECIMENTO**. Aprender é um processo ativo e não passivo: o conhecimento verdadeiro vem através da ação do estudante, e no caso da matemática, fazer os exercícios é fundamental para se chegar em um nível satisfatório de conhecimento. Então, mão na massa!

Neste curso eu coloquei tudo aquilo que acho interessante você aprender a respeito do Cálculo. Busquei combinar uma teoria rigorosa com muitas técnicas mecânicas de cálculo mesmo, uma combinação que você não vê em livro algum por aí: os livros mais teóricos não trazem tanto as técnicas mecânicas, e aqueles mais mecânicos não trazem tanto a teoria.

Este material contém bem mais conteúdo do que normalmente consta em um curso de Cálculo I, então você deve selecionar os tópicos principais de acordo com a sua necessidade e o seu interesse. E eu te garanto que se fizer os 100% desse curso, o que inclui realizar os exercícios, alcançará um nível realmente diferenciado em Cálculo e terá uma base sólida para o resto da sua vida.

Uma palavra sobre esta apostila: ela não é um livro! Ela compila as aulas feitas em vídeo. Então a melhor maneira de aproveitá-la é utilizando-a lado a lado com as videoaulas. Uma vez que tenha assistido às aulas, a apostila se torna uma boa forma de revisar conteúdos mais rapidamente.

Por fim, eu recomendo que você assista à aula bônus do curso a respeito de dicas de estudo. Em poucos minutos eu resumi diversas técnicas úteis para agilizar e melhorar o seu aprendizado, então vale a pena dar uma olhada.

Agora chega de papo e vamos colocar a mão na massa e iniciar nossa jornada rumo ao domínio do infinito!

Daniel Nunes

Índice

Parte I – Pré-Cálculo

CONJUNTOS

Conjuntos	2
-----------------	---

NÚMEROS

Números	19
Princípio da Indução Finita	45
Símbolo de Somatório	50
Binômio de Newton e Produtos Notáveis	52
Sequências, PA e PG	60
Desigualdades, Intervalos e Módulo	72
Números Complexos	88
O Axioma do Supremo*	93
Representação Decimal e Aproximação Racional	101

FUNÇÕES

Funções	107
Gráfico de Funções	120
Funções de 1º, 2º e 3º graus e Funções Potência	134
Polinômios	149
Funções Racionais e Algébricas	159

Exponencial e Logaritmo	163
-------------------------------	-----

TRIGONOMETRIA

Ângulos, Geometria, Seno e Cosseno	175
Funções Trigonométricas	192
Números Complexos (Forma Polar)	214

GEOMETRIA ANALÍTICA

Plano Cartesiano e Retas	224
Cônicas	234

Parte II – Cálculo

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO

Introdução ao Cálculo	252
-----------------------------	-----

LIMITES E CONTINUIDADE

Ideia Intuitiva de Limite de Sequências	267
Definição Rigorosa de Limite de Sequências	274
Propriedades Fundamentais do Limite de Sequências	284
O Número de Euler e	292

Limite de Funções	296
Definição Formal do Limite de Funções	303
Quando L NÃO é o Limite?	310
Limites Infinitos	312
Propriedades Fundamentais do Limite de Funções	318
Continuidade	326
Resultados Importantes de Continuidade	340

DERIVADA

Derivada	373
Derivadas de Potências, Raízes, Polinômios e F. Racionais	390
Derivada da Exponencial	400
Regra de Leibniz	405
Derivadas Trigonométricas	408
Regra da Cadeia	412
Derivação Implícita e da Inversa	417
Derivada do Logaritmo	426
Funções Hiperbólicas	429
Máximos e Mínimos	443
Teorema do Valor Médio	452
Testes da Primeira e da Segunda Derivadas	462
Indeterminações e Regra de L'Hôpital	487

Esboço de Gráficos	504
Método de Newton*	513
Primitivas	521

INTEGRAL

Integral	526
O Teorema Fundamental do Cálculo	554
Tabela de Integrais	577
Método da Substituição	581
Áreas entre Curvas	590
Volumes	597
Integração por Partes	610
Integrais Trigonométricas	616
Substituição Trigonométrica e Hiperbólica	631
Integração de Funções Racionais	644
Integrais Impróprias e Testes de Convergência	673
Comprimento de Arco	692
Áreas de Superfícies	696

SÉRIES INFINITAS

Sequências e Séries	703
Testes de Convergência e Rearranjo	719

Séries de Potências	753
Séries de Taylor	779

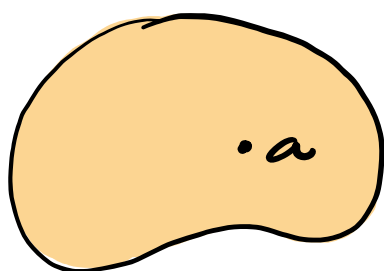
Parte I: Pré-Cálculo

CONJUNTOS

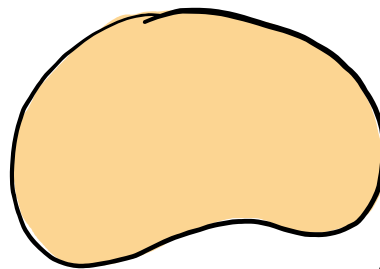
Pré-Cálculo: Conjuntos

CONJUNTOS

São a linguagem da matemática moderna!



A $a \in A$



A $a \notin A$

• Conjuntos substituem "propriedades" e "condições"

~~x possui a propriedade "P"~~



$x \in A$, onde
 $A =$ conjunto dos
 objetos que possuem
 a propriedade "P"

EXEMPLO

- x é par $\longrightarrow x \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
- y é ímpar $\longrightarrow y \in \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

QUAL A VANTAGEM DOS CONJUNTOS?

qual o número que
adicionado de três
após ser duplicado dá
sete?



$$2x + 3 = 7$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Mesma coisa com conjuntos:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \dots$$

(álgebra de conjuntos)

EXEMPLO

- a) x é par
- b) x está entre 3 e 17
- c) x é múltiplo de 5

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, \dots, 13, 14, 15, 16, 17\}$$

$$C = \{0, 5, 10, 15, 20, \dots\}$$

$$x \in (A \cap B) \cap C = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} \cap C$$

$$= \{10\} \Rightarrow \boxed{x=10}$$

– Normalmente representamos conjuntos por letras maiúsculas ou estilizadas:

EXEMPLO: $A, B, \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\},$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{R} = \{\text{números reais}\}$$

– Se a é elemento de A , escrevemos $a \in A$

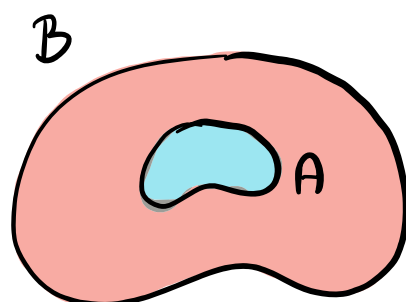
EXEMPLO: Se P é o conjunto dos números pares positivos, então $2 \in P$ e $3 \notin P$

lê-se 3 "não pertence" a P

– $A = B$ se todos os elementos de A forem elementos de B e vice-versa. Do contrário, $A \neq B$.

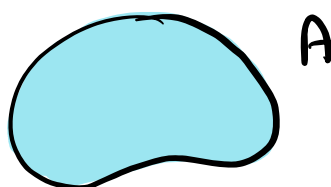
EXEMPLO: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$
 $\Rightarrow A = B$

— Subconjunto: A é subconjunto de B se todo elemento de A for elemento de B . Escrevemos $A \subset B$.

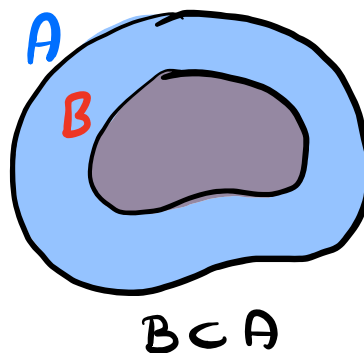
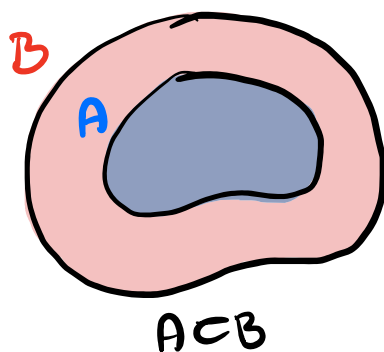


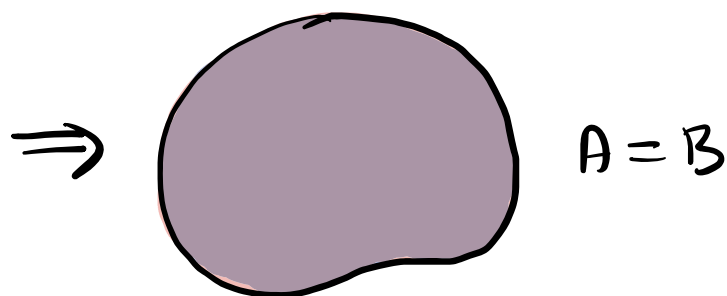
PROPRIEDADES DA INCLUSÃO:

- $A \subset A$ (reflexividade)



- $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$ (assimetria)

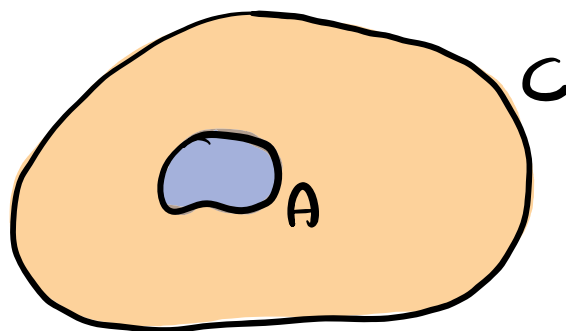
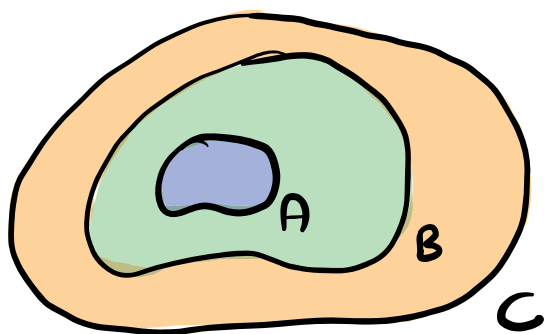
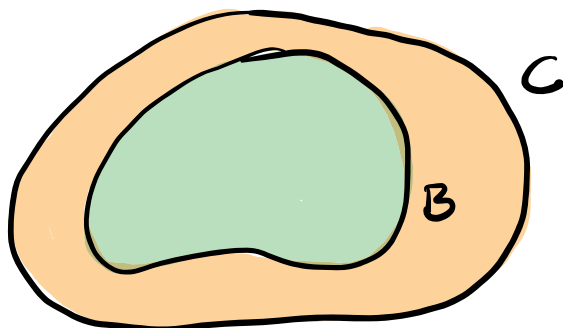
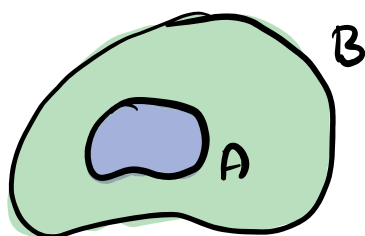




IMPORTANTE

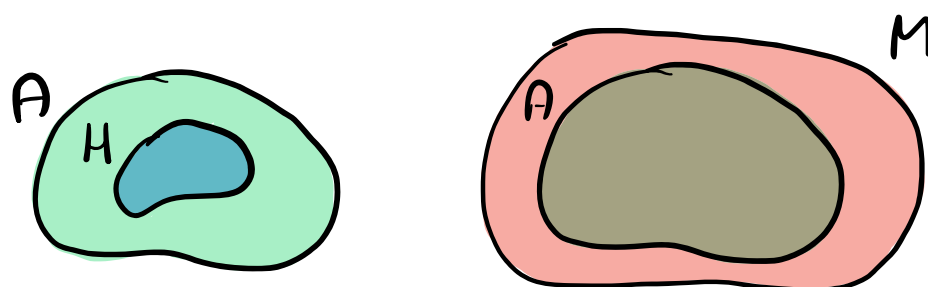
Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A=B$.

- $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$
(transitividade)

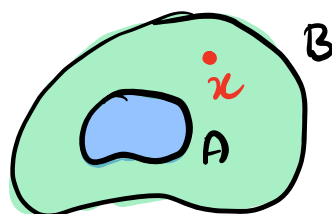


Silogismo

- Todo homem é animal
- Todo animal é mortal
- Logo: todo homem é mortal



- Se $A \subset B$ e $A \neq B$, A é subconjunto próprio de B .



$$x \in B, \\ x \notin A$$

- Com frequência descreveremos conjuntos a partir de alguma propriedade básica. Se P é o conjunto dos números pares,

$$P = \{ x \in \mathbb{N} \mid z \text{ divide } x \}$$

↑ "tal que"

- Conjunto vazio:

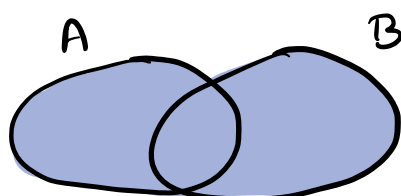
$\{ \}$ ou $\emptyset$

OBS: $\emptyset \subset A$ para todo conjunto A

OBS 2: $\{ \emptyset \} \neq \emptyset$

OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

• UNIÃO



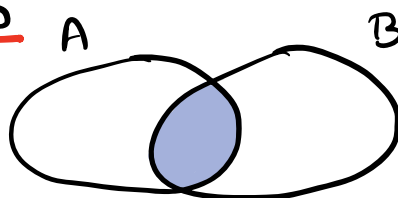
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

↳ dif. linguagem comum

OBS:

$$A \cup \emptyset = A$$

• INTERSEÇÃO

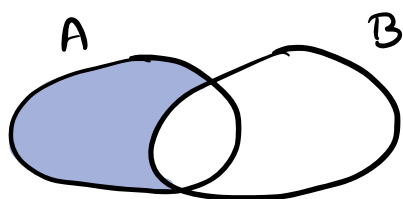


$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

OBS:

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

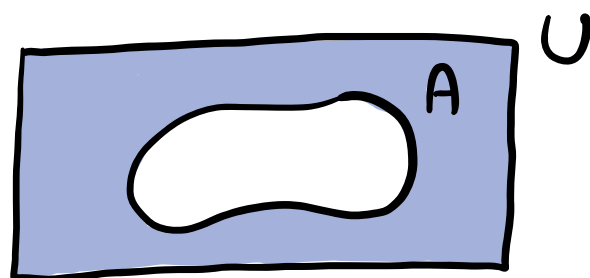
• COMPLEMENTAR (DIFERENÇA)



$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

↳ alguns escrevem $A - B$

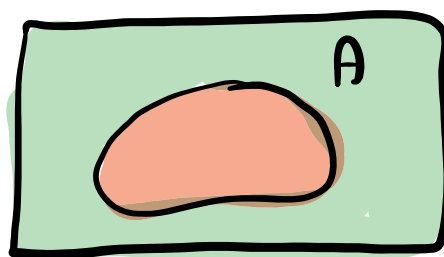
▶ Quando há um conjunto universo U subentendido, dizemos apenas que $U \setminus A$ é o complementar de A e escrevemos A^c .



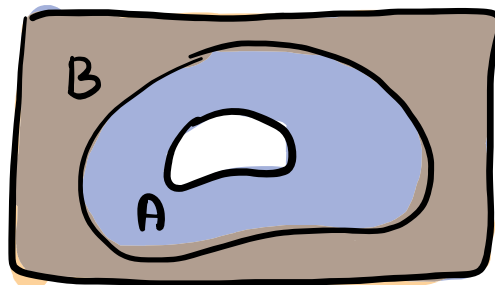
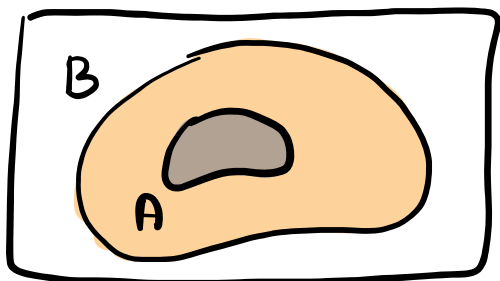
EXEMPLO: Se $U = \mathbb{N}$ e P é o conjunto dos números pares, P^c é o conjunto dos números ímpares.

OBS:

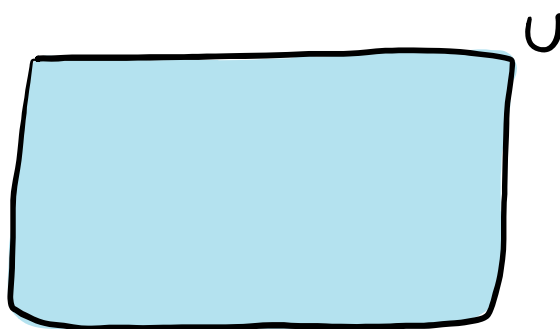
• $(A^c)^c = A$



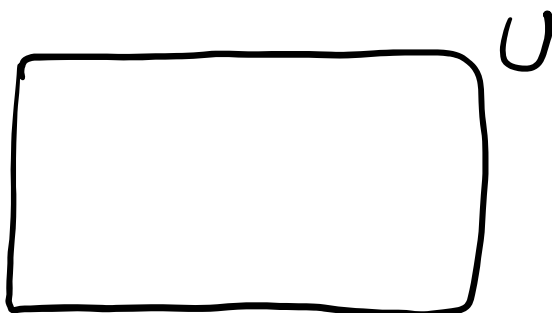
- $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$



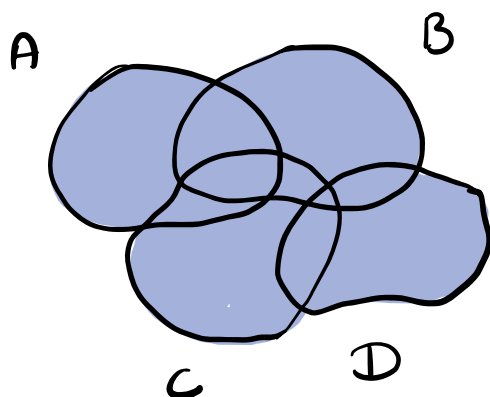
- $\emptyset^c = U$



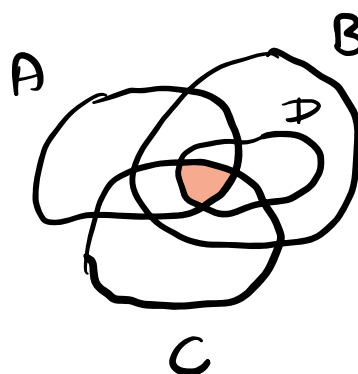
- $U^c = \emptyset$



UNIÕES E INTERSEÇÕES ENTRE + CONJUNTOS



$$A \cup B \cup C \cup D$$



$$A \cap B \cap C \cap D$$

se $\mathcal{C}$ é coleção de conjuntos, definimos

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \mid x \in A \text{ para algum } A \in \mathcal{C}\}$$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \mid x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{C}\}$$

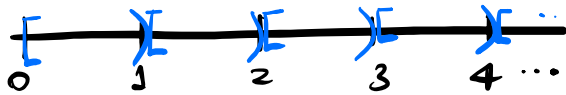
se $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ é uma coleção finita de conjuntos, escrevemos

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcup_{k=1}^m A_k \quad \text{e} \quad \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcap_{k=1}^m A_k$$

EXEMPLO

$$\mathcal{C} = \{ [n-1, n) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$\{x \in \mathbb{R} \mid n-1 \leq x < n\}$

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n-1, n)$$


$$= [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

Mas como ter CERTEZA?

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$

$$\forall a \in A \Rightarrow a \in B ; \quad \forall b \in B \Rightarrow b \in A$$

$$\bullet a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [n-1, n) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$a \in [n-1, n) \Rightarrow a \geq n-1 \geq 0$$

$$\Rightarrow a \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

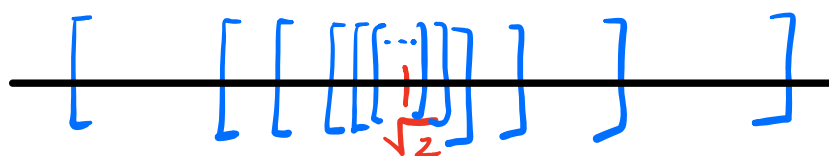
$$\bullet b \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \Rightarrow b = \underline{1072}, 241\dots,$$

$$\underline{1072}_{n-1} \leq b < \underline{1073}_n . \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$b \in [n-1, n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [n-1, n).$$

EXEMPLO

$$\mathcal{C} = \left\{ \left[\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$



Intervalos encaixantes:

$$I_n = \left[\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n} \right]$$

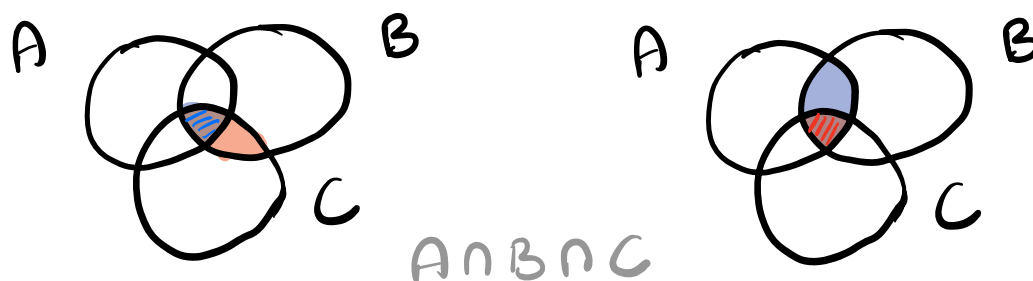
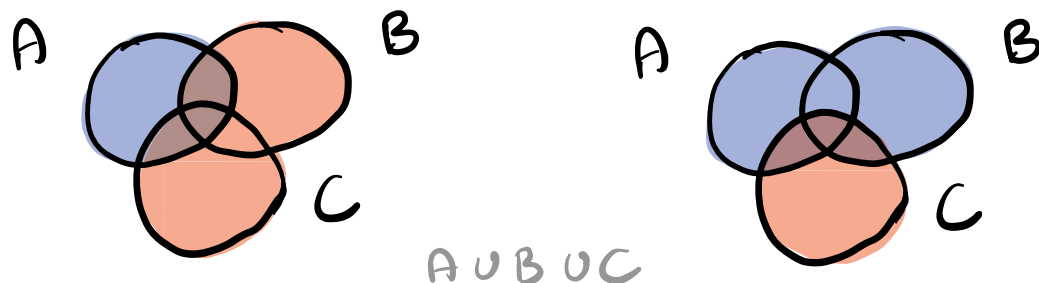
$$I_{n+1} \subset I_n \subset I_{n-1} \subset \dots \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\sqrt{2}\}$$

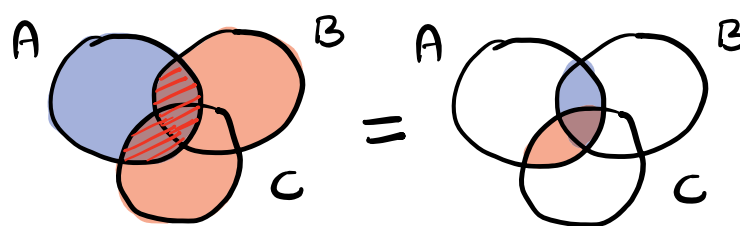
• PROPRIEDADES

$$- A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A \quad (\text{comutativa})$$

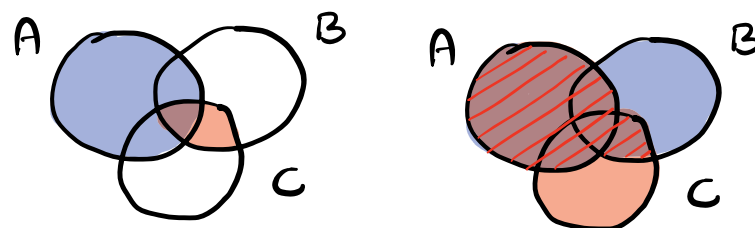
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
(associativa)



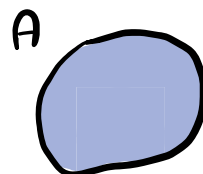
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva)



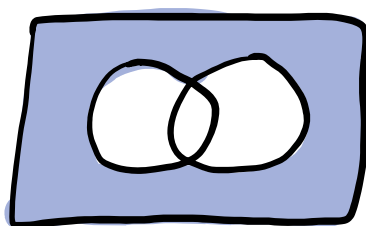
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva)



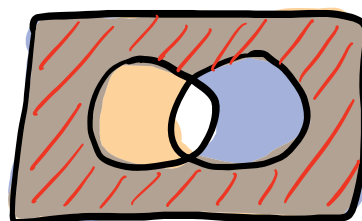
$$- A \cup \emptyset = A$$



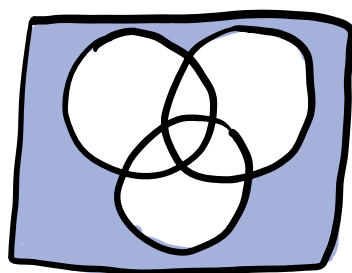
$$- \left(\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \right)^c = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A^c$$



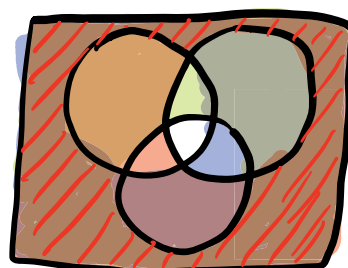
$$(A \cup B)^c$$



$$A^c \cap B^c$$

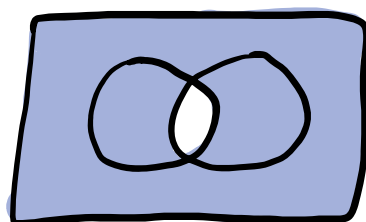


$$(A \cup B \cup C)^c$$

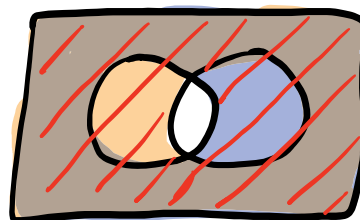


$$A^c \cap B^c \cap C^c$$

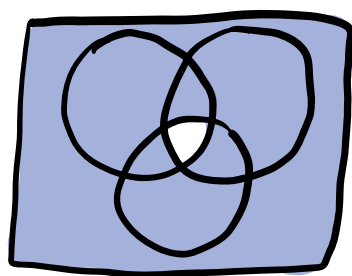
$$- \left(\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A \right)^c = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A^c$$



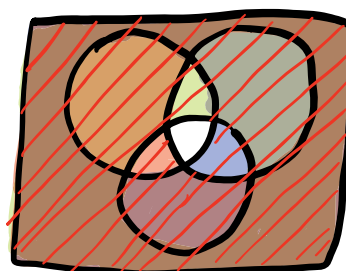
$$(A \cap B)^c$$



$$A^c \cup B^c$$



$$(A \cap B \cap C)^c$$



$$A^c \cup B^c \cup C^c$$

Parte I: Pré-Cálculo

NÚMEROS

Pré-Cálculo: Números

NÚMEROS

• NÚMEROS NATURAIS:

"Deus criou os números naturais. O resto é obra dos homens" (Leopold Kronecker)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

- Alguns autores consideram que $0 \in \mathbb{N}$. Para nós: $\mathbb{N}^*$ = $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

- $\mathbb{N}$ atende às necessidades de contagem

- Se $a, b \in \mathbb{N}$, então $a+b$ e $a \cdot b \in \mathbb{N}$

PROPRIEDADES ARITMÉTICAS BÁSICAS EM $\mathbb{N}$:

- DA ADIÇÃO:

• $a + b = b + a$ (COMUTATIVIDADE)

$$2 + 7 = 9$$

$$7 + 2 = 9$$

- $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ASSOCIATIVIDADE)

$$2 + (4 + 7) = 2 + 11 = 13$$

$$(2 + 4) + 7 = 6 + 7 = 13$$

- DA MULTIPLICAÇÃO:

- $a \cdot b = b \cdot a$ (COMUTATIVIDADE)

$$3 \cdot 4 = 12$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ASSOCIATIVIDADE)

$$(3 \cdot 2) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$$

$$3 \cdot (2 \cdot 5) = 3 \cdot 10 = 30$$

- $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{N}$ (ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO: 1)

- DE AMBAS:

• $(a+b)c = ac + bc$ (Distributividade)

$$(2+5) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 6 + 15 = 21$$

$$7 \cdot 3 = 21$$

OBS: $(a+b)(c+d)$

$$= a(c+d) + b(c+d)$$

$$= a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

$$(a+b)(c+d)$$

$$= a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

OBS 2: $\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ vezes}} = n \cdot a$

$$n \cdot a = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ vezes}} a$$

$$= \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ vezes}}$$

EXEMPLO: $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$

$$= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

$$= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$$

$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Divisibilidade e Números Primos

- ALGORITMO DE DIVISÃO

$$\begin{array}{r} 19 \\ \downarrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{r} 6 \\ 6 \end{array} \Rightarrow 19 = 6 \cdot 3 + 1$$

Generalizando: $\forall a, b \in \mathbb{N}$,

$\exists c \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ tais que

$$a = c \cdot b + r$$

• b divide a ($b|a$) se $\exists c \in \mathbb{N}^*$ tal que $a = c \cdot b$

EXEMPLO

$$3|15 \text{ pois } 15 = 5 \cdot 3$$

$$2|2 \text{ pois } 2 = 1 \cdot 2$$

$$1|n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ pois } n = n \cdot 1$$

- NÚMEROS PRIMOS

$p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ é primo se só possui dois divisores: 1 e p .

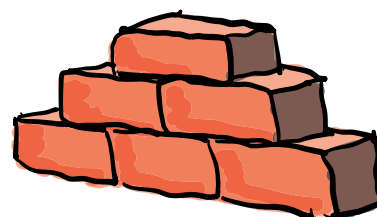
EXEMPLO:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, existem primos $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ e naturais $a_1, a_2, \dots, a_k$ tais que

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k},$$



Os primos são os blocos construtores de $\mathbb{N}$

e essa decomposição é Única.

EXEMPLO:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$28 = 2^2 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l}
 45 & 3 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 \downarrow & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad 45 = 3^2 \cdot 5$$

• MDC (MÁXIMO DIVISOR COMUM)

$\text{mdc}(a, b)$ é o maior natural que divide a e b .

EXEMPLO: $\text{mdc}(28, 70) = ?$

$$\begin{array}{r|l}
 70 & 2 \\
 35 & 5 \\
 7 & 7 \\
 \downarrow & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 28 &= 2^2 \cdot 7 \\
 &= 2 \cdot 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 70 &= 2 \cdot 5 \cdot 7 \\
 &= 5 \cdot 14
 \end{aligned}$$

$$\text{mdc}(28, 70) = 2 \cdot 7 = 14$$

• Se $\text{mdc}(a, b) = 1$, dizemos que a e b são primos entre si

EXEMPLO: 28 e 45 são primos entre si

$$28 = 2^2 \cdot 7, \quad 45 = 3^2 \cdot 5$$

Sem fatores primos em comum

- NÚMEROS INTEIROS:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3 \text{ é solução em } \mathbb{N}$$

$$x + 5 = 2 \Rightarrow \text{sem solução em } \mathbb{N}$$
$$x = -3$$

$$- \quad x + a = b \text{ tem solução } \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

$$- \text{ Se } a, b \in \mathbb{Z}, \text{ então } a+b, a-b \text{ e } a \cdot b \in \mathbb{Z}$$

- NÚMEROS RACIONAIS :

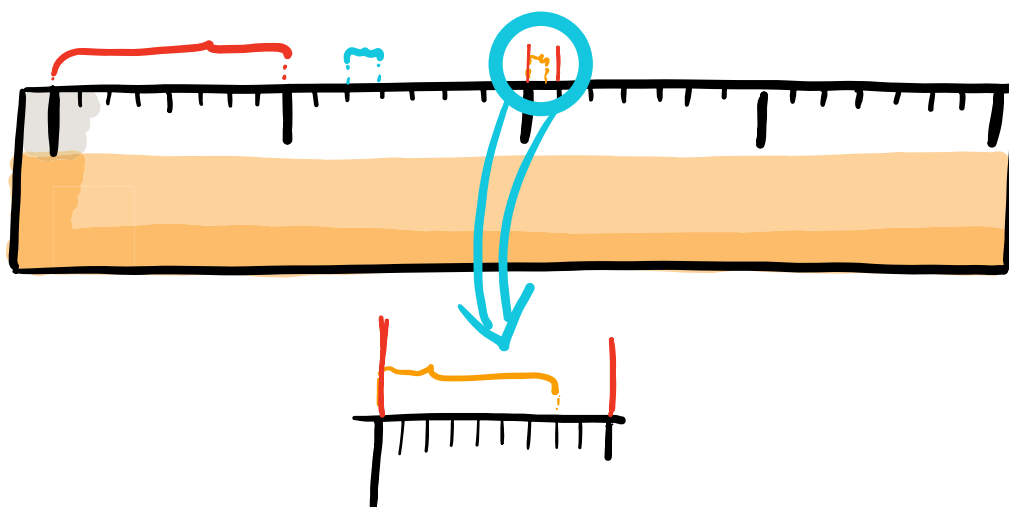
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

- São as frações entre números inteiros.
- A representação a/b é única se $\text{mdc}(a, b) = 1$

$$-\frac{11}{33} = \frac{-11}{3 \cdot \cancel{11}} = -\frac{1}{3}$$

- Se $a, b \in \mathbb{Q}$, então $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ e $a/b \in \mathbb{Q}$ (desde que $b \neq 0$)

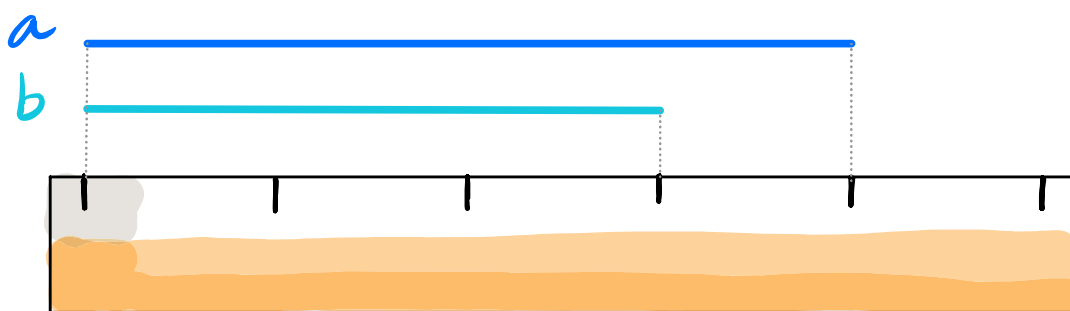
- $\mathbb{Q}$ atende às necessidades práticas de medidas.



- NÚMEROS REAIS : $\mathbb{R}$

- Atendem às necessidades **teóricas** de medidas

- O que é medir?

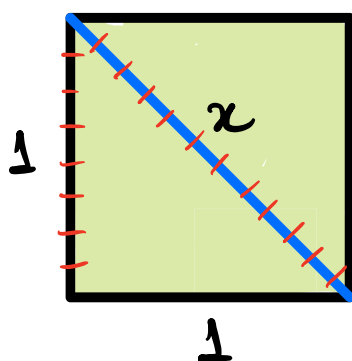


$$\begin{aligned} b &= 3 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{3}b$$

- Nem sempre isso é possível.

EXEMPLO: Diagonal do quadrado:



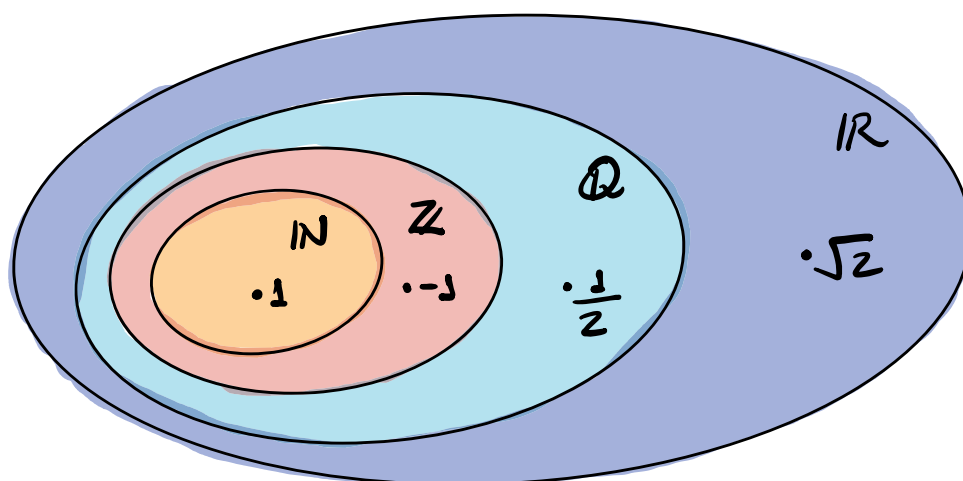
$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$(\sqrt{2} \in \mathbb{R})$$

- Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $a \pm b$, $a \cdot b$ e a/b ($b \neq 0$) $\in \mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



POR QUE $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$?

$$a > 0, a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}$$

$\sqrt{2}$ NÃO cumpre isso.

PROVA (por absurdo)

$$\text{Se } \sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{mdc}(p, q) = 1.$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow 2 \mid p.$$

$$\Rightarrow p = 2 \cdot p'$$

$$\sqrt{2} = \frac{2p'}{q} \Rightarrow \cancel{2} = \frac{\cancel{4}(p')^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow 2(p')^2 = q^2 \Rightarrow 2 \mid q.$$

Então 2 é fator comum, daí $\text{mdc}(p, q) \neq 1$, absurdo. 

PROPRIEDADES ARITMÉTICAS BÁSICAS EM $\mathbb{R}$

- DA ADIÇÃO:

- $a + b = b + a$ (COMUTATIVIDADE)
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ASSOCIATIVIDADE)
- $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (ELEMENTO NEUTRO ADITIVO: 0)
- Dado $a \in \mathbb{R}$, $\exists -a \in \mathbb{R}$ tal que
- $a + (-a) = 0$ (EXISTÊNCIA DO INVERSO ADITIVO)

- DA MULTIPLICAÇÃO:

- $a \cdot b = b \cdot a$ (COMUTATIVIDADE)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ASSOCIATIVIDADE)
- $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO: 1)
- Dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ (também denotado como $1/a$) tal que $a \cdot a^{-1} = 1$ (EXISTÊNCIA DO INVERSO MULTIPLICATIVO)

- DE AMBAS:

• $(a+b)c = ac + bc$ (DISTRIBUTIVIDADE)

- DE FRAÇÕES:

• soma de frações com mesmo denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

• soma de frações com denominadores diferentes:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

EXEMPLO:

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} - \frac{3}{10} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{25 - 6}{10} \\ &= \frac{19}{20} \end{aligned}$$

- Multiplicação de frações:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- Divisão de frações:

OBS 1: a^{-1} satisfaz $a \cdot a^{-1} = 1$

Então

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad \text{pois} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$$

OBS 2: $a \div b = \frac{a}{b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a \cdot 1}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$

Então

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}$$

- DIVISÃO POR ZERO :

NÃO se pode dividir por zero:

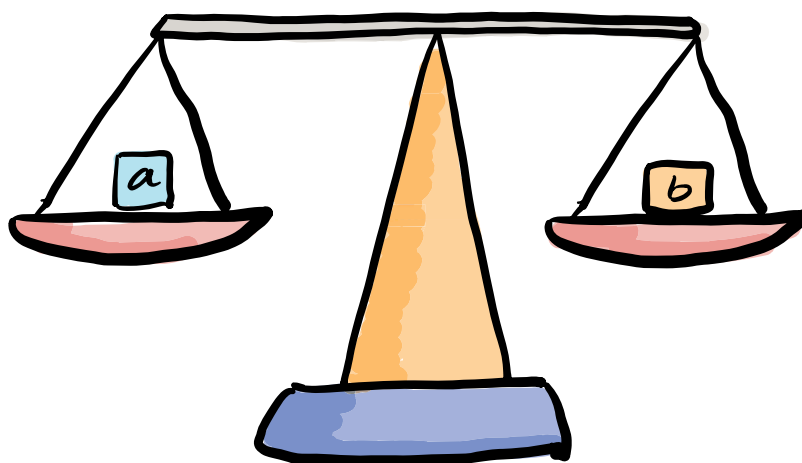
$$\frac{1}{0,1} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$$

$$\frac{1}{0,01} = 100 \quad \frac{1}{0,001} = 1000 \quad \dots$$

$$\frac{1}{10^{-n}} = 10^n \rightarrow \infty$$

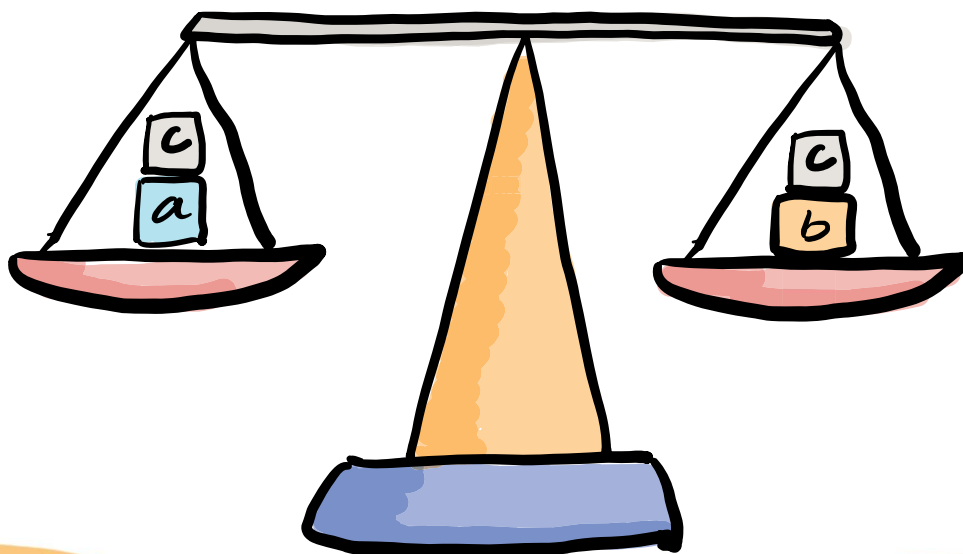
PROPRIEDADES DAS IGUALDADES

- Uma igualdade $a = b$ é uma balança equilibrada



- Tudo feito de um lado precisa ser feito do outro para preservar o equilíbrio.

- $a = b \Rightarrow a + c = b + c$



- LEI DO CANCELAMENTO

1) da soma:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}:$$

$$a + \cancel{c} = b + \cancel{c} \Rightarrow a = b$$

$$\begin{aligned} a + c + (-c) &= b + c + (-c) \\ \Rightarrow a + (c + (-c)) &= b + (c + (-c)) \\ \Rightarrow a + 0 &= b + 0 \\ \Rightarrow a &= b \end{aligned}$$

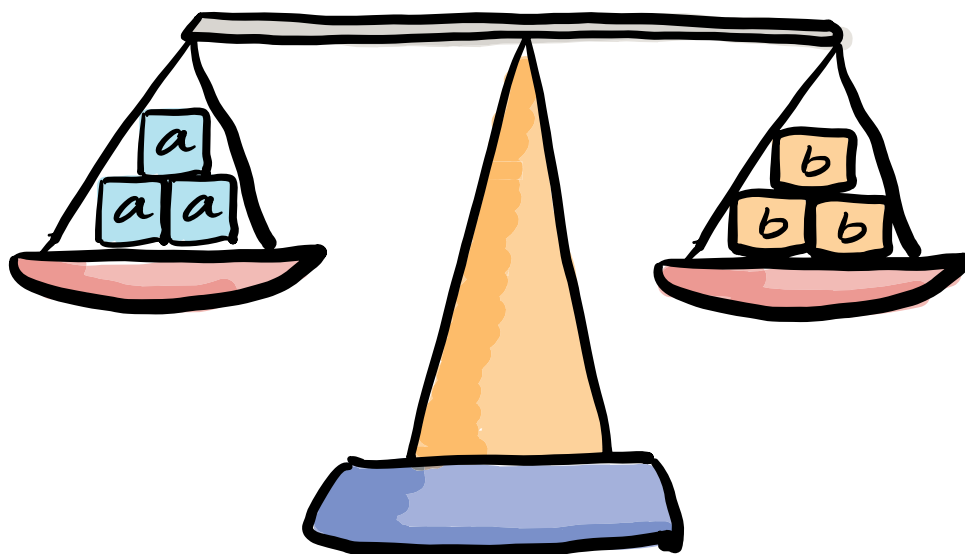
OBS: $0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$0 + \cancel{0 \cdot a} = 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + \cancel{0 \cdot a} \\ \Rightarrow 0 \cdot a = 0$$

OBS 2: "colocar e tirar".

$$\text{Se } a = b, \text{ então } a + c - c = b$$

- $a = b \Rightarrow c \cdot a = c \cdot b$



OBS: "multiplicar e dividir"

Se $a = b$, então $\frac{a}{c} \cdot c = b \quad \forall c \neq 0$.

- LEI DO CANCELAMENTO

2) do produto:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$$

$$\cancel{a \cdot c} = \cancel{b \cdot c} \Rightarrow a = b$$

$$a \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c} \right) = b \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c} \right) \Rightarrow a = b$$

- ANULAÇÃO DO PRODUTO:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}:$$

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Se $a \neq 0$, existe $1/a$:

$$\frac{1}{a} \cdot a \cdot b = \frac{1}{a} \cdot 0 \Rightarrow b = 0$$

- IGUALDADE DE FRAÇÕES

→ "Multiplicar em cruz":

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \boxed{ad = bc}$$

$$\frac{a \cdot \cancel{b} \cdot d}{\cancel{b}} = \frac{c \cdot b \cdot \cancel{d}}{\cancel{d}}$$

→ Se $\frac{a}{b} = 0$, então $a = 0$

POTENCIAÇÃO

• POTÊNCIA DE EXPOENTE NATURAL

$$a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

EXEMPLO:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

OBS: $(-a)^n \neq -a^n$ (em geral)

PROPRIEDADES:

$$(i) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m+n}$$

$$(ii) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\underbrace{a^m \cdot \dots \cdot a^m}_n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n}$$

• POTÊNCIA DE EXPOENTE INTEIRO

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, m, n \in \mathbb{Z}$$

→ queremos garantir que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

1°) $n = 0$:

$$a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$$

$$\Rightarrow a^0 \cdot a = a \Rightarrow \boxed{a^0 = 1}$$

2°) $n \in \mathbb{N}$:

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \Rightarrow \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

PROPRIEDADES:

$$(i) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Se $m > 0, n < 0$:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{|n|}} = \frac{\overbrace{a \cdots a}^m}{\underbrace{a \cdots a}_{|n|}} = a^{m+n}$$

- $m \geq |n|$:

$$\frac{\overbrace{a \cdots a}^m}{\underbrace{a \cdots a}_{|n|}} = a^{m-|n|} = a^{m+n}$$

- $m < |n|$

$$\frac{\overbrace{a \cdots a}^m}{\underbrace{a \cdots a}_{|n|}} = \frac{1}{a^{|n|-m}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{|n|-m} = a^{m-|n|} = a^{m+n}$$

$$(ii) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$n < 0$:

$$(a^m)^n = (a^m)^{-|n|} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{|n|} = \frac{1}{a^{m \cdot |n|}} = \frac{1}{a^{m \cdot (-n)}} = a^{m \cdot n}$$

• POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

$$a > 0, a \in \mathbb{R}; \quad r = m/n \quad (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$$

→ queremos garantir que $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$$(a^r)^n = \underbrace{a^r \cdot \dots \cdot a^r}_{n \text{ vezes}} = a^{r+\dots+r} = a^{rn} = a^{rn}$$

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

OBS: por **DEFINIÇÃO**, $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

EXEMPLO:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (\text{e não } a \text{ ou } \pm|a|)$$

← definição!

PROPRIEDADES:

$$(i) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \quad (m \in \mathbb{Z}; n, p \in \mathbb{N})$$

$$x = \sqrt[n]{a^m} \Rightarrow x^n = a^m \Rightarrow x^{n \cdot p} = a^{m \cdot p}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

$$(ii) \sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[q \cdot n]{a} \quad (n, q \in \mathbb{N})$$

$$x = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} \Rightarrow x^q = \sqrt[n]{a} \Rightarrow (x^q)^n = a$$

$$\Rightarrow x^{q \cdot n} = a \Rightarrow x = \sqrt[q \cdot n]{a}.$$

$$(iii) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\begin{aligned} x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &\Rightarrow x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n \\ &= (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b \Rightarrow x = \sqrt[n]{a \cdot b} \end{aligned}$$

$$(iv) a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q} \Rightarrow r+s = \frac{mq + np}{nq}$$

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} \\ &= \sqrt[q \cdot n]{a^{q \cdot m}} \cdot \sqrt[q \cdot n]{a^{p \cdot n}} = \sqrt[q \cdot n]{a^{q \cdot m} \cdot a^{p \cdot n}} = \sqrt[q \cdot n]{a^{mq + np}} \\ &= a^{r+s} \end{aligned}$$

$$(v) (a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$\begin{aligned} \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a^{mp}}} \\ &= \sqrt[n \cdot q]{a^{mp}} = a^{r \cdot s} \quad \left(r \cdot s = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}\right) \end{aligned}$$

• POTÊNCIA DE EXPOENTE REAL

$$a > 0, a \in \mathbb{R}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, aproximamos α por uma sequência de racionais.

EXEMPLO: $3^{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots$$

Note que

$$1 < 1,4 < 1,41 < 1,414 < 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 < 1,415 < 1,42 < 1,5 < 2$$

Então:

$$3^1 < 3^{1,4} < 3^{1,41} < 3^{1,414} < 3^{1,4142} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,4143} < 3^{1,415} < 3^{1,42} < 3^{1,5} < 3^2$$

$\swarrow$ $\searrow$ $\searrow$
 $4,7287\dots$ $4,7288\dots$ $4,7292\dots$

PROPRIEDADES:

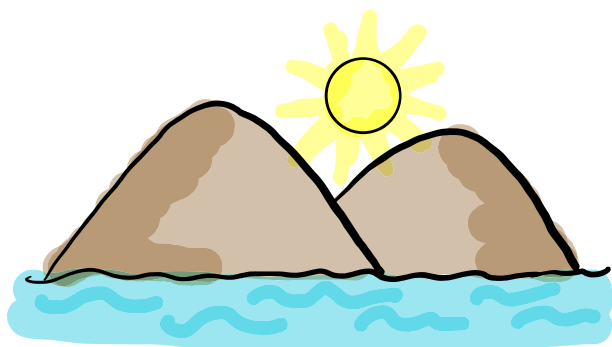
$$(i) a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$$

$$(ii) (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha \cdot \beta}$$

Pré-Cálculo: Princípio da Indução Finita

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

- Indução vulgar: generaliza observações



"O sol nascerá todos os dias"

$$x = 2^{2^n} + 1 \text{ é primo } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} n=0 &\rightarrow 3 && \checkmark \\ n=1 &\rightarrow 5 && \checkmark \\ n=2 &\rightarrow 17 && \checkmark \\ n=3 &\rightarrow 257 && \checkmark \\ n=4 &\rightarrow 65.537 && \checkmark \end{aligned}$$



Fermat (1607-1665)

MAS:

$$n=5 \rightarrow 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417 \quad \times$$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

$$\bullet n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$$

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa a $n \in \mathbb{N}$. Suponha que:

(i) $P(1)$ seja válida

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ vale, então $P(n+1)$ também vale.

ENTÃO: $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLO: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$

$$P(n) : 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$(i) P(1) : 1 = 1^2 \quad \checkmark$$

(ii) Se $P(n)$ vale, então:

$$\underbrace{[1 + 3 + \dots + (2n-1)]}_{n^2} + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + 2(n+1) - 1$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Logo, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. ✓

Pelo p. da indução, $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLO:

$P(n): (a+1)^n \geq 1+na, \forall n \in \mathbb{N}, a \geq -1$

(i) $P(1): a+1 \geq 1+a$ ✓

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ✓

$$(a+1)^{n+1} = (a+1)^n \cdot (a+1)$$

$$\geq (1+na)(a+1)$$

$$= a+1+na^2+na$$

$$= 1+(n+1)a + \underbrace{na^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1+(n+1)a$$

Logo, por indução, vale $P(n) \forall n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLO: $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq n \quad \forall n \geq 3$

$$P(n): \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq n$$

$$(i) \quad P(3): \left(\frac{3+1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \leq 3 \quad \checkmark$$

$$(ii) \quad P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\leq n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + \frac{n}{n} = n+1.$$

Logo, por indução, $P(n)$ vale $\forall n \geq 3$.

EXEMPLO: Se A tem n elementos,
o n° de subconjuntos de A é 2^n .

(i) $\#A = 1 \Rightarrow \emptyset, A \rightarrow 2 \text{ subc. } P(1) \checkmark$

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1) \checkmark$

$A, \#A = n \rightarrow A' = A \cup \{a\} \quad \#A' = n+1$

$S \subset A' \Rightarrow S \subset A \text{ ou}$

$S = \{a\} \cup S', \text{ onde } S' \subset A$

Então o n° de subconjuntos de A' é

$$2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Logo, por indução, $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pré-Cálculo: Símbolo de Somatório

O SÍMBOLO DO SOMATÓRIO

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$

Forma compacta:

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2$$

Diagrama de anotações para a fórmula compacta:

- Um arco aponta de n para cima para o texto "fim da contagem".
- Um arco aponta de $k=1$ para baixo para o texto "início da contagem".
- Um arco aponta de k^2 para a direita para o texto "termo geral".
- Um arco aponta de $k=1$ para a esquerda para o texto "índice".

OBS: A letra do índice não importa:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{\ell=1}^n \ell^2 = \sum_{m=1}^n m^2$$

OBS 2: Há várias formas de representar a mesma soma:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=-1}^{n-2} (k+2)^2$$

Fazendo $\ell = k+2$, temos:

$$\begin{cases} k=-1 \Rightarrow \ell=1 \\ k=n-2 \Rightarrow \ell=n \end{cases}$$

Daí,

$$\sum_{k=-1}^{n-2} (k+2)^2 = \sum_{\ell=1}^n \ell^2$$

De um modo mais geral: Dados $a_1, a_2, \dots, a_n$,

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

EXEMPLO: Calcule $\sum_{j=1}^4 2^{j-1}$

$$\sum_{j=1}^4 2^{j-1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15.$$

EXEMPLO:

$$\sum_{j=1}^4 2^{j-1} = \sum_{r=0}^3 2^r = \sum_{n=0}^3 2^{3-n} = \sum_{k=1}^4 2^{4-k}$$

$\downarrow$ $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$ $\downarrow$ $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$ $\downarrow$ $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

EXEMPLO: $\sum_{p=0}^m a^p b^{m-p}$

$$\sum_{p=0}^m a^p b^{m-p} = b^m + ab^{m-1} + a^2b^{m-2} + \dots + a^{m-1}b + a^m$$

PROPRIEDADES DO SOMATÓRIO

DICA Nº 1: Somatórios são uma notação para somas

$$\sum_{k=0}^N a_k = (a_0 + a_1 + \dots + a_N)$$

Então somatórios têm propriedades que são consequência de propriedades das somas.

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=m}^n \alpha = \alpha \cdot (n+1-m)$$

$$\sum_{k=m}^n \alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{n+1-m \text{ vezes}}$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=m}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=m}^n a_k \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=m}^n \alpha a_k = (\alpha a_m + \alpha a_{m+1} + \dots + \alpha a_n)$$

$$= \alpha (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) = \alpha \sum_{k=m}^n a_k$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{k=m}^n b_k$$

$$\sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k) = [(a_m \pm b_m) + (a_{m+1} \pm b_{m+1}) + \dots + (a_n \pm b_n)]$$

$$= [(a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) \pm (b_m + b_{m+1} + \dots + b_n)]$$

$$= (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) \pm (b_m + b_{m+1} + \dots + b_n)$$

$$= \sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{k=m}^n b_k$$

EXEMPLO: Soma dos 100 primeiros Impares:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{99} (2n+1) &= 2 \sum_{n=0}^{99} n + \sum_{n=0}^{99} 1 \\
 &= 2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} + 100 \\
 &= 9900 + 100 = 10.000
 \end{aligned}$$

+ detalhes na aula sobre P.A.

$$④ \sum_{k=m}^m a_k = a_m$$

$$⑤ \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k, \quad \forall m \leq p \leq n$$

$$\sum_{k=m}^n a_k = (a_m + \dots + a_p + a_{p+1} + \dots + a_n)$$

$$= (a_1 + \dots + a_p) + (a_{p+1} + \dots + a_n)$$

$$= \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$$

$$\textcircled{6} \sum_{k=m}^n a_{k+p} = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_k, \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k=m}^n a_{k+p} = (a_{m+p} + a_{m+p+1} + \dots + a_{n+p}) = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_k$$

$$\textcircled{7} \sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$$

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=m}^n a_{k+1} - \sum_{k=m}^n a_k$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k - \sum_{k=m}^n a_k$$

$$= (\cancel{a_{m+1}} + \dots + \cancel{a_n} + \underline{a_{n+1}}) - (\underline{a_m} + \cancel{a_{m+1}} + \dots + \cancel{a_n})$$

$$= a_{n+1} - a_m$$

$$\textcircled{8} \sum_{k=m-p}^n a_k + \sum_{k=m}^{n+q} b_k =$$

$$= \sum_{k=m-p}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) + \sum_{k=n+1}^{n+q} b_k$$

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*$$

$$\sum_{k=m-p}^n a_k + \sum_{k=m}^{n+q} b_k = \sum_{k=m-p}^{m-1} a_k + \left(\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k \right) + \sum_{k=n+1}^{n+q} b_k$$

$$= \sum_{k=m-p}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) + \sum_{k=n+1}^{n+q} b_k$$

$$\textcircled{9} \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k|$$

Desigualdade triangular: $|a+b| \leq |a| + |b|$

$\Rightarrow$ Se $n = m+1$, então

$$\left| \sum_{k=m}^{m+1} a_k \right| = |a_m + a_{m+1}| \leq |a_m| + |a_{m+1}|$$

$$= \sum_{k=m}^{m+1} |a_k|$$

Provaremos o caso geral por indução.
Suponha que valha a propriedade para n .
Vamos provar que vale para $n+1$:

$$\left| \sum_{k=m}^{n+1} a_k \right| = \left| \left(\sum_{k=m}^n a_k \right) + a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| + |a_{n+1}|$$

$$\leq \sum_{k=m}^n |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=m}^{n+1} |a_k|$$

Portanto, por indução, vale ⑨

Pré-Cálculo: Binômio de Newton e Produtos Notáveis

TEOREMA DO BINÔMIO

(também chamado de "Binômio de Newton")

- FATORIAL $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 & (n \geq 1) \\ 1 & (n=0) \end{cases}$$

EXEMPLO:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 20 \cdot 6 = 120$$

$$0! = 1$$

OBS: De quantas formas podemos ordenar em fila n objetos distintos?

$n=5$:

$$\underline{5} \quad \underline{4} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{1} \quad \rightarrow 5!$$

$$n \text{ geral: } \underline{n} \quad \underline{n-1} \quad \underline{n-2} \quad \cdots \quad \underline{1} \quad P_n = n!$$

- NÚMEROS BINOMIAIS: $n, p \in \mathbb{Z}, n \geq p \geq 0$

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

OBS: De quantas formas podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos?

$$n = 5, p = 3$$

$$\frac{5}{ABC} = \frac{4}{BCA} = \frac{3}{CBA} \rightarrow \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 3!} = \binom{5}{3}$$

PROPRIEDADES:

- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!} = \binom{n}{n-p}$$

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! n!} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$\bullet \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \quad \forall n > p \geq 0, n, p \in \mathbb{Z}$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!}$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \cdot \left[\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1} \right]$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \cdot \frac{\cancel{p+1} + \cancel{n-p}}{(n-p) \cdot (p+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)![(n+1)-(p+1)]!}$$

$$= \binom{n+1}{p+1}$$

$$\bullet \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

TRIÂNGULO DE PASCAL

	0	1	2	3	4	: p
n: 0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	

$\binom{n}{p} = \binom{3}{2}$

$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

BINÔMIO DE NEWTON (TEOREMA DO BINÔMIO)

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

PROVA:

$$P(n): (a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

$$(i) P(1): (a+b) = \binom{1}{0} \cdot a + \binom{1}{1} \cdot b \quad \checkmark$$

$$(ii) P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\
&= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p (a+b) \\
&= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n+1-p} \cdot b^p + \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{(n+1)-(p+1)} \cdot b^{p+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \left[\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} \right] a^{(n+1)-(p+1)} \cdot b^{p+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n+1}{p+1} a^{n+1-(p+1)} \cdot b^{p+1} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} \cdot b^p
\end{aligned}$$

Logo, por indução, segue o teorema.

EXEMPLO :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} &= 2^n \\
2^n &= (1+1)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

PRODUTOS NOTÁVEIS

$$\bullet (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\bullet (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\bullet (a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

(Consequências do Binômio de Newton)

$$\bullet a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$= a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2$$

$$\bullet a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - b^3$$

$$\bullet a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

PROVA :

↪ P(n)

(i) P(1) ✓

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ✓

$$\begin{aligned}
 & (a-b) \cdot (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n) \\
 &= (a-b) (a^n + b \cdot [a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}]) \\
 &= a^n(a-b) + b \cdot \underbrace{(a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})} \\
 &= a^{n+1} - a^n \cdot b + b \cdot (a^n - b^n) \\
 &= a^{n+1} - \cancel{a^n b} + \cancel{a^n b} - b^{n+1} = a^{n+1} - b^{n+1}.
 \end{aligned}$$

O resultado segue por indução.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad a^3 + b^3 &= (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) \\
 &\quad a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3
 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad a^5 + b^5 = (a+b) \cdot (a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$\bullet \quad a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b) \cdot (a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$$

PROVA:

$$\begin{aligned}
 (a^{2n+1} + b^{2n+1}) &= [a^{2n+1} - (-b)^{2n+1}] \\
 &= [a - (-b)] \cdot [a^{2n} + a^{2n-1}(-b) + a^{2n-2}(-b)^2 + \dots \\
 &\quad + (-b)^{2n}] \\
 &= (a+b) \cdot (a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + b^{2n}).
 \end{aligned}$$

Pré-Cálculo: Sequências, PA e PG

Sequências. PA e PG

- Sequência de números reais:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots), \quad a_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

EXEMPLO

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

EXEMPLO: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, mas podemos aproximar $\sqrt{2}$ por racionais:

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237309\dots$$

Temas duas sequências de aproximação:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1,4$$

$$a_3 = 1,41$$

$$a_4 = 1,414$$

$$a_5 = 1,4142$$

$$b_1 = 2$$

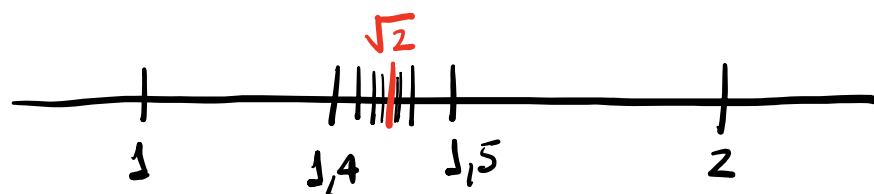
$$b_2 = 1,5$$

$$b_3 = 1,42$$

$$b_4 = 1,415$$

$$b_5 = 1,4143$$

$$a_n < \sqrt{2} < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



EXEMPLO: Sequência dos números primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 11, \dots$

EXEMPLO: $\pi_n = \# \text{ primos } \leq n$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

$\pi_1 = 0, \pi_2 = 1, \pi_3 = \pi_4 = 2, \pi_5 = \pi_6 = 3,$

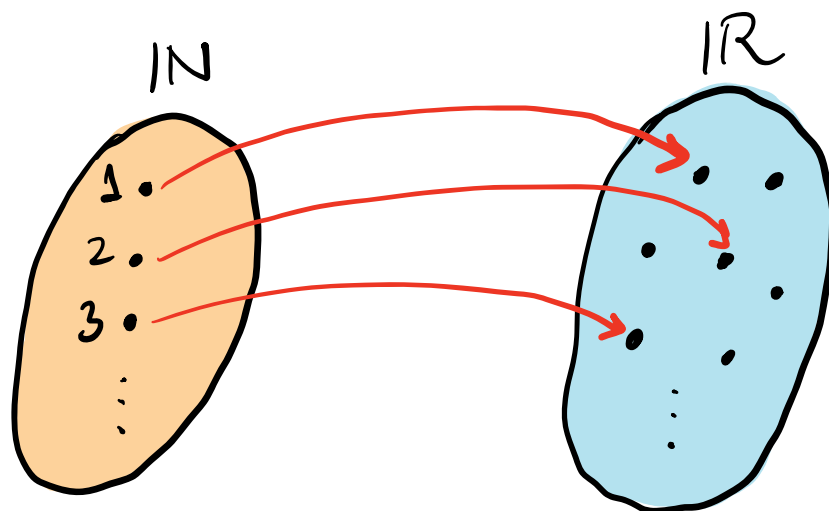


Gauss, 1777–1855

Aos 14 anos, conjecturou que $\pi_n \approx n/\log n$ de forma assintótica.

$$\frac{\pi_n}{n/\log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

OBS: Na linguagem de funções, uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma função



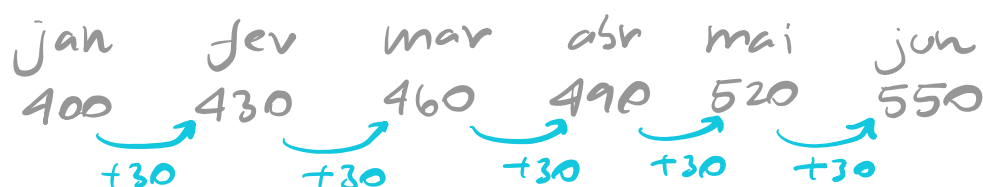
$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n$$

$$f(n) = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $a_{n+1} - a_n = r$
 $\forall n \in \mathbb{N}$, constante (r é a razão da PA)

EXEMPLO: Uma fábrica produziu 400 veículos em janeiro e aumentou, mensalmente, sua produção em 30 veículos por mês. Quantos veículos produzia em junho?



Termo geral de uma PA

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2 \cdot r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3 \cdot r$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Rekursivamente:

$$\begin{cases} a_1 \\ a_n = a_{n-1} + r, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

EXEMPLO: O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem foi em 1986. Quando foi sua primeira passagem desde o nascimento de Cristo? Quantas vezes ele passou desde então?

$$a_1 = 1986 \quad r = -76$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1986 - (n-1) \cdot 76 \\ &= 2062 - 76 \cdot n \end{aligned}$$

$$2062 = 27 \cdot 76 + 10$$

$$a_{27} = 2062 - 76 \cdot 27 = 10$$

Passou 27 vezes, a primeira em 10 d.C.

OBS: É comum começar a PA por a_0

EXEMPLO: O preço de um carro novo é R\$ 70.000 e diminui R\$ 5.000 por ano. Qual o preço após 4 anos de uso?

$$a_0 = 70.000 \quad r = -5000$$

$$a_n = 70.000 - 5000 \cdot n$$

$$a_4 = 70.000 - 5000 \cdot 4 = 50.000.$$

SOMA DOS TERMOS DE UMA P.A.

- Quanto vale $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$?



Gauss, 1777-1855

Gauss, aos 7 anos:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \dots + 100 &= \\
 (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) &= \\
 = 101 + 101 + \dots + 101 &= \\
 = 50 \cdot 101 = 5050 &
 \end{aligned}$$

De um modo geral:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

PROVA: $P(1): \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ ✓

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ✓

$$(1 + 2 + \dots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Segue por indução.

SOMA DE P.A. QUALQUER

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 + (k-1)r \end{aligned}$$

$$= n \cdot a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot r$$

$$= n \cdot a_1 + r \cdot \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{n}{2} [a_1 + a_1 + r(n-1)]$$

$$= \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
constante. (q é a razão da PG)

EXEMPLO Um investimento rende 10% ao ano. Quanto valerão R\$ 1000 investidos inicialmente após passados 5 anos?

0	1	2	3	4	5
1000	1100	1210	1331	1464,10	1610,51

Termo geral de uma PG

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Recursivamente:

$$\begin{cases} a_1; \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

EXEMPLO: Em uma PG, o 5º termo vale 5 e o 8º vale 135. Quanto vale o 7º termo?

$$\frac{a_8}{a_5} = q^3 = \frac{135}{5} = 27 \Rightarrow q = 3$$

$$a_7 = \frac{a_8}{q} = \frac{135}{3} = 45.$$

EXEMPLO: Que número deve ser somado aos números $a-2$, a e $a+3$ para que eles formem uma PG, nessa ordem?

$$a-2+x, a+x, a+3+x$$

$$\frac{a+x}{a-2+x} = \frac{a+3+x}{a+x}$$

$$\Rightarrow (\underbrace{a+x}_y)^2 = (a+x+3)(a+x-2)$$

$$\cancel{y^2} = (y+3)(y-2) = \cancel{y^2} - 2y + 3y - 6$$

$$\Rightarrow y = 6 \Rightarrow a+x = 6 \Rightarrow x = 6-a$$

$$4, 6, 3 \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

SOMA DE UMA P.G.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

PROVA:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot (1 + q + \dots + q^{n-1})$$

Produto notável:

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\Rightarrow q^n - 1 = (q - 1) \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)$$

$$\Rightarrow 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\text{Logo, } S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

EXEMPLO: Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de arroz pela 1ª casa, 2 pela 2ª, 4 pela 3ª etc. Quantos grãos ele pediu pelas 64 casas?

$$a_n = 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$S_{64} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} \approx 18 \cdot 10^8 \text{ grãos.}$$

EXEMPLO : $0,999\dots = 1$

$$0,999\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$$

Repare que

$$\begin{aligned} 0,\underbrace{99\dots 9}_{n \text{ termos}} &= \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \left(\frac{10^{-n} - 1}{10^{-1} - 1} \right) \\ &= \frac{9}{10} \left(\frac{1 - 1/10^n}{1 - 1/10} \right) = \frac{9}{10} \frac{(1 - 1/10^n)}{\frac{9}{10}} \\ &= 1 - \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

OBS : Se $|q| < 1$, então $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\text{Ex: } \left(\frac{1}{10} \right)^n = 0,\underbrace{00\dots 01}_{n-1 \text{ zeros}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



Assim, quando $|q| < 1$, podemos considerar a soma da PG infinita:

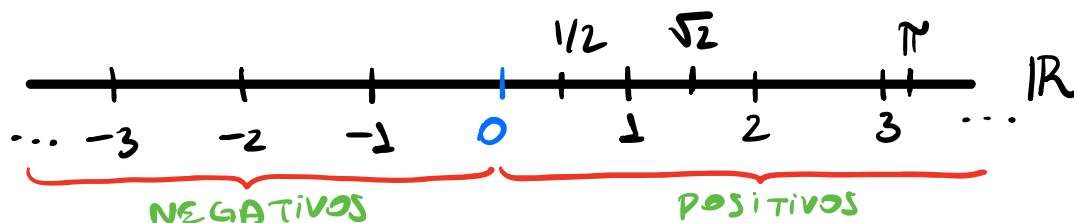
$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

pois

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$$

Pré-Cálculo: Desigualdades, Intervalos e Módulo

RETA REAL



- Representa graficamente a relação de ordem $<$ (Ex: $2 < 3$)

OBS: $a \leq b$ se $a < b$ ou $a = b$

• DESIGUALDADES:

$$x \in \mathbb{R}$$

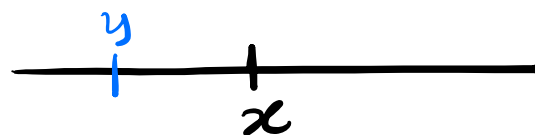
3 possibilidades:

- (i) $x > 0$ (positivo)
- (ii) $x = 0$ (zero)
- (iii) $x < 0$ (negativo) $\Rightarrow -x > 0$

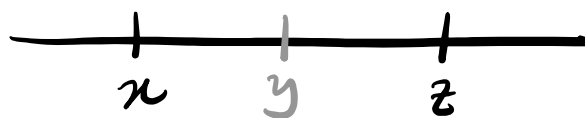
Se $x < y$, então $y - x > 0$

PROPRIEDADES DE "<"

(i) $x, y \in \mathbb{R}$. Então uma das 3 ocorre:
 $x < y$, $x = y$ ou $x > y$ (tricotomia)

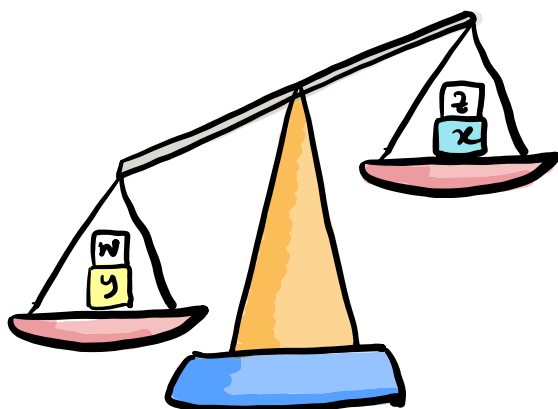


(ii) $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ (transitividade)



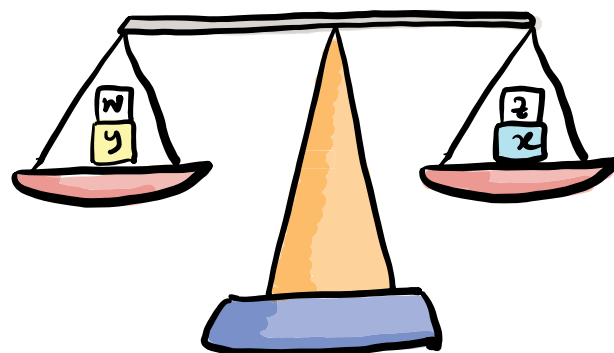
(iii) Se $x < y$, então

$$x + z < y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$$



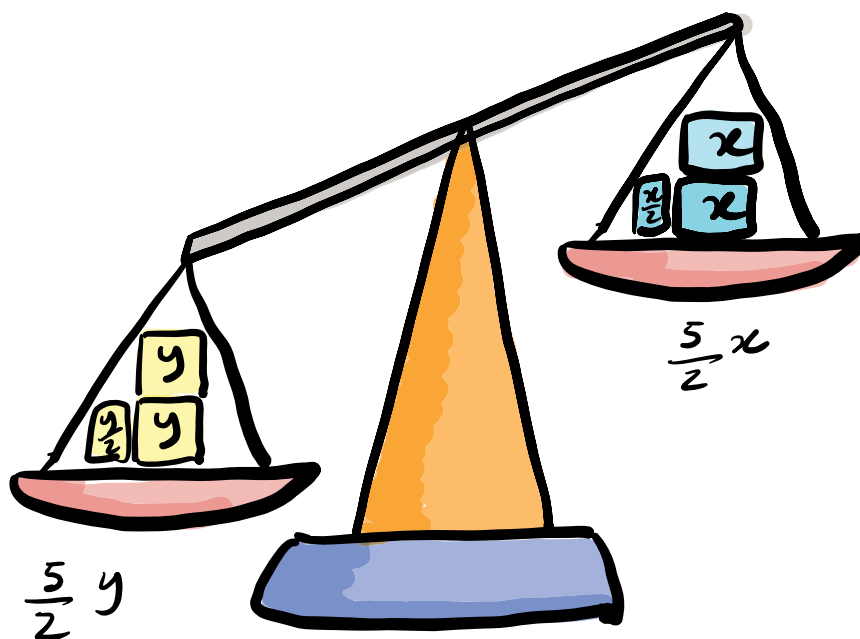
$$\text{Se } z < w, \quad x + z < x + w$$

OBS: Vale também nas igualdades!



(iv) Se $x < y$ e $z > 0$, então

$$x \cdot z < y \cdot z$$



MAS:

$$x < y \text{ e } \underline{z < 0} \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$$

INVERTE!

$$x < y \Rightarrow y - x > 0 \quad \times \underbrace{(-z)}_{>0}$$

$$\Rightarrow (-z)(y - x) > 0$$

$$xz - yz > 0$$

$$\Rightarrow xz > yz$$

$$(v) \quad 0 < a < b \Rightarrow 1/b < 1/a$$



(Quanto maior o número, menor seu inverso)

$$(vi) \quad a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

$$a > 0 \Rightarrow a \cdot a > 0 \cdot a \Rightarrow a^2 > 0$$

$$a < 0 \Rightarrow a \cdot a \underline{\underline{>}} 0 \cdot a \Rightarrow a^2 > 0$$

OBS:

$$x \leq y \Rightarrow x < y \text{ ou } x = y$$

$$x \geq y \Rightarrow x > y \text{ ou } x = y$$

DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

MÉDIA ARITMÉTICA

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

EXEMPLO: Uma empresa produzia 100, 300 e 200 unidades no trimestre. Qual sua produção média mensal?

$$A = \frac{100 + 300 + 200}{3} = 200$$

Logo, a média foi 200/mês.

MÉDIA GEOMÉTRICA ($x_k > 0 \forall k$)

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$$

EXEMPLO Um investimento rendeu 10% no 1º ano, -5% no 2º, 15% no 3º. Qual foi a rentabilidade média anual?

$$x_1 = 1,1, \quad x_2 = 1 - 0,05 = 0,95, \quad x_3 = 1,15.$$

$$G = \sqrt[3]{1,1 \cdot 0,95 \cdot 1,15} \approx 1,063$$

Logo, a média foi 6,3% a.a.

DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

ou seja,

$$G \leq A$$

A igualdade só ocorre se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

PROVA:

1) $n=2$

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

$$2) n = 4$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2}$$

$$\geq \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt{x_1 x_2} \sqrt{x_3 x_4}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

Indução: $G \leq A$ para $n = 2^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Se vale para $n = 2^k$, temos

$$\frac{x_1 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} = \frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) + \dots + \left(\frac{x_{2^{k+1}-1} + x_{2^{k+1}}}{2}\right)}{2^k}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sqrt[2^k]{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdots \left(\frac{x_{2^{k+1}-1} + x_{2^{k+1}}}{2}\right)} \\
&\geq \sqrt[2^k]{\sqrt{x_1 x_2 \cdots x_{2^{k+1}-1} x_{2^{k+1}}}} \\
&= \sqrt[2^{k+1}]{x_1 \cdots x_{2^{k+1}}}
\end{aligned}$$

Logo, vale $\forall n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.

3) $n=3$

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

Considere $\{x_1, x_2, x_3, A\}$ ($n=4$)

$$\bar{A} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + A}{4} = \frac{3A + A}{4} = A$$

$$\Rightarrow A = \bar{A} \geq \bar{G} = \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot A}$$

$$\Rightarrow A^4 \geq x_1 x_2 x_3 \cdot A \Rightarrow A^3 \geq x_1 x_2 x_3$$

$$\Rightarrow A \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = G.$$

$$4) \quad n = 2^k - p, \quad 0 < p < 2^{k-1}$$

$$A = \frac{x_1 + \dots + x_{2^k-p}}{2^k-p}$$

Considerar $\{x_1, x_2, \dots, x_{2^k-p}, \underbrace{A, A, \dots, A}_{p \text{ vezes}}\}$ ($n=2^k$)

$$\bar{A} = \frac{x_1 + \dots + x_{2^k-p} + p \cdot A}{2^k} = \frac{(2^k-p)A + p \cdot A}{2^k} = A$$

$$\text{Temos} \quad A = \bar{A} \geq \bar{G} = \sqrt[2^k]{x_1 \dots x_{2^k-p} \cdot A^p}$$

$$\Rightarrow A^{2^k} \geq x_1 \dots x_{2^k-p} \cdot A^p \Rightarrow A^{2^k-p} \geq x_1 \dots x_{2^k-p}$$

$$\Rightarrow A \geq G.$$



REGRA DOS SINAIS

"(-) com (-) dá (+); (+) com (-) dá (-)..."

- $a, b > 0$: $a \cdot b > 0$

- $a > 0, b < 0$: $a \cdot b < 0$

$$b < 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow a \cdot (-b) > 0$$

$$0 = a \cdot 0 = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot b + a \cdot (-b)$$

$$\Rightarrow a \cdot b = -[a \cdot (-b)] < 0$$

- $a < 0, b < 0$: $a \cdot b > 0$

$$-b > 0 \Rightarrow a \cdot (-b) < 0$$

$$0 = a \cdot 0 = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot b + a \cdot (-b)$$

$$\Rightarrow a \cdot b = -[a \cdot (-b)] > 0$$

VALOR ABSOLUTO (MÓDULO)

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases} = \max \{-a, a\}$$

EXEMPLO: $|-3| = 3$, $|2| = 2$, $|0| = 0$

PROPRIEDADES:

(i) $|a| \geq 0$

(ii) $|a| = 0 \iff a = 0$

(iii) $|a|^2 = a^2$

$$\begin{cases} \text{se } |a| = a \Rightarrow |a|^2 = a^2 \\ \text{se } |a| = -a \Rightarrow |a|^2 = (-a)^2 = a^2 \end{cases}$$

(iv) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$|a \cdot b|^2 = (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2 = |a|^2 \cdot |b|^2$$

$$\Rightarrow |a \cdot b|^2 - (|a| \cdot |b|)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(|a \cdot b| - |a| \cdot |b|)}_{=0} \cdot (|a \cdot b| + |a| \cdot |b|) = 0$$

$$\Rightarrow |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$(iv) |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$\begin{cases} \text{se } |a+b| = a+b \leq |a| + |b| \\ \text{se } |a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b| \end{cases}$$

$$(v) ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

- se $||a| - |b|| = |a| - |b|$:

$$|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|$$

$$\Rightarrow ||a| - |b|| = |a| - |b| \leq |a - b|$$

- se $||a| - |b|| = |b| - |a|$:

$$|b| = |(b-a) + a| \leq |b-a| + |a| = |a-b| + |a|$$

$$\Rightarrow ||a| - |b|| = |b| - |a| \leq |a - b|$$

EXEMPLO: Resolva $|x-2| = 3$

$$1) x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

Temos $|x-2| = x-2 = 3 \Rightarrow x = 5$ OK!

$$2) \quad x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$$

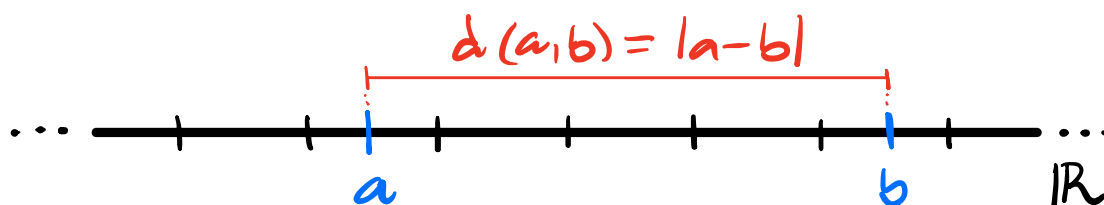
ok!

$$\text{Temos } |x - 2| = 2 - x = 3 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{Solução: } x = -1 \text{ ou } x = 5.$$



• Distância entre dois números reais:



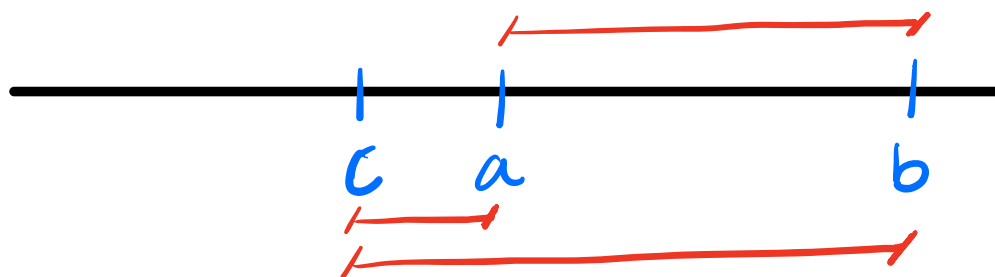
OBS: • $d(a, b) \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

• $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

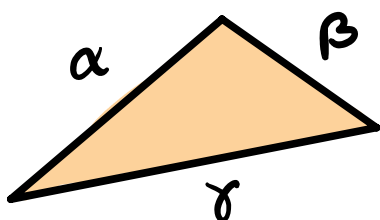
IMPORTANTE

• $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$

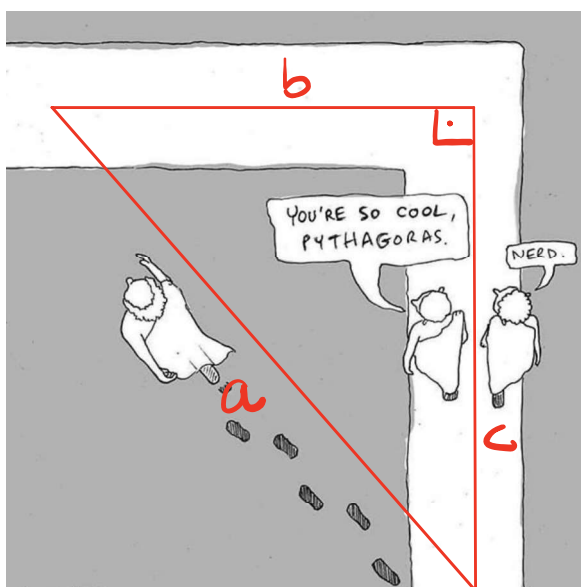
Esta é a chamada "desigualdade triangular", que em módulo se expressa como

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$$


O nome é inspirado no fato de que, em um triângulo, cada lado é sempre menor que a soma dos outros dois.



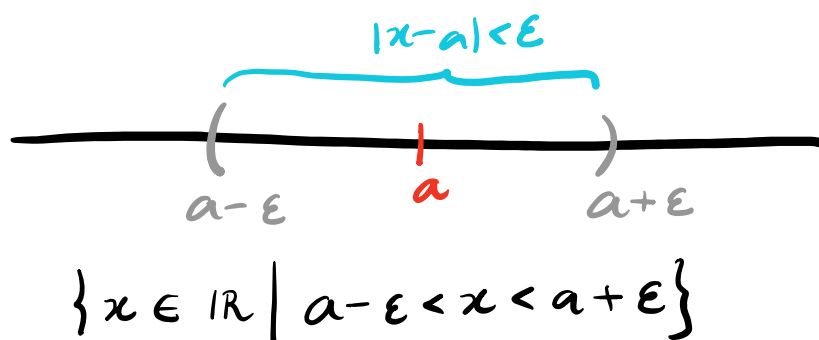
$$\begin{cases} \alpha < \beta + \gamma \\ \beta < \alpha + \gamma \\ \gamma < \alpha + \beta \end{cases}$$



$$a \leq b + c$$

EXEMPLO

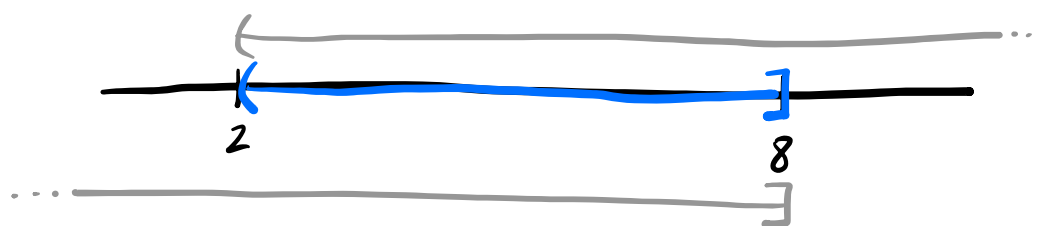
$$|x - a| < \varepsilon$$



EXEMPLO Resolva $3 < 2x - 1 \leq 15$

$$1) \quad 3 < 2x - 1 \Rightarrow 4 < 2x \Rightarrow x > 2$$

$$2) \quad 2x - 1 \leq 15 \Rightarrow 2x \leq 16 \Rightarrow x \leq 8$$



$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 8\} = (2, 8]$$

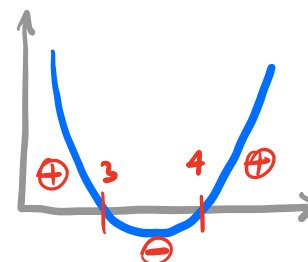
EXEMPLO Resolva $x^2 - 7x + 12 \leq 0$

Note que $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$

Estudo sinal:

	$x - 3$	$x - 4$	$(x - 3) \cdot (x - 4)$
$x < 3$	-	-	+
$3 < x < 4$	+	-	-
$x > 4$	+	+	+

Solução: $\{x \in \mathbb{R}; 3 \leq x \leq 4\}$



INTERVALOS

- São subconjuntos conexos da reta:

$$\text{---} \left(\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right) \text{---} \quad \text{ABERTO}$$

$a \qquad b$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$\text{---} \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right] \text{---} \quad \text{FECHADO}$$

$a \qquad b$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$\text{---} \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right) \text{---} \quad \text{SEMI-ABERTO}$$

$a \qquad b$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$\begin{array}{l} \dots \text{---} \left(\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right) \text{---} \\ \text{---} \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right) \text{---} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} (-\infty, b) \\ [a, \infty) \end{array} \right\} \text{NÃO-LIMITADOS}$$

$-\infty \qquad b \qquad \infty$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$\text{---} \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right) \dots \infty$$

a

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

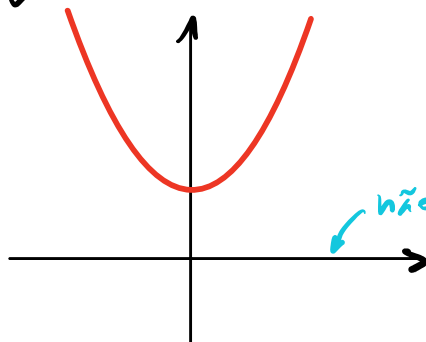
OBS:

- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- o intervalo é sempre aberto em $\pm\infty$, pois $\pm\infty \notin \mathbb{R}$

Pré-Cálculo: Números Complexos

NÚMEROS COMPLEXOS

$f(x) = x^2 + 1$ não tem raiz real:



$$x^2 + 1 > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se tivesse raiz:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

Unidade imaginária: i

$$i^2 = -1 \\ \Rightarrow i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

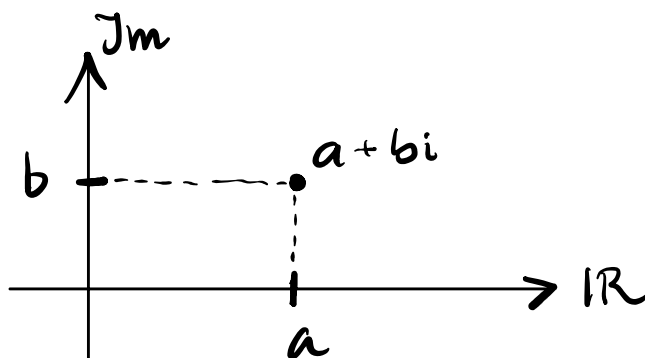
Números complexos

$$\mathbb{C} = \{ z = a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$a = \operatorname{Re}(z)$$

$$b = \operatorname{Im}(z)$$

Plano Complexo



PROPRIEDADES BÁSICAS EM $\mathbb{C}$:

- $z = a + b\bar{i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \quad (\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$

- $z = a + b\bar{i} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

- $z_1 = a_1 + b_1\bar{i} = a_2 + b_2\bar{i} = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

• SOMA:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1\bar{i}) + (a_2 + b_2\bar{i}) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\bar{i} \end{aligned}$$

• PRODUTO (não é termo a termo!)

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1\bar{i})(a_2 + b_2\bar{i})$$

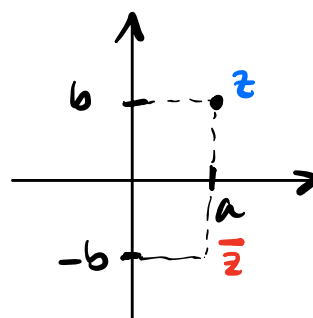
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 \bar{i} + a_2 b_1 \bar{i} + b_1 b_2 \underbrace{\bar{i}^2}_{-1}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\bar{i}$$

• CONJUGADO

$$z = a + b\bar{i}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = a - b\bar{i}$$



- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$$\begin{aligned} & \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} \\ &= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i} \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

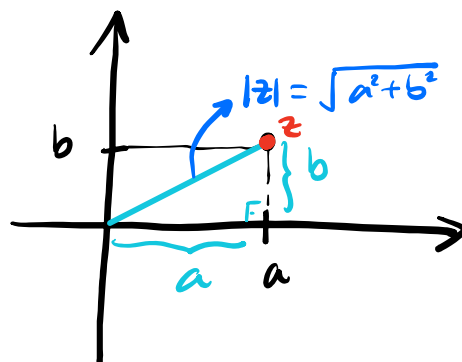
Por outro lado,

$$\begin{aligned} \overline{(a_1 + b_1 i)} \cdot \overline{(a_2 + b_2 i)} &= (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) \\ &= [a_1 a_2 - (-b_1)(-b_2)] + [a_1(-b_2) + a_2(-b_1)] i \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

Logo, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

- MÓDULO

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z \cdot \overline{z}} \\ &= \sqrt{(a + bi)(a - bi)} \\ &= \sqrt{a^2 - (bi)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$



- $|z| > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, com $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &= (z_1 \bar{z}_1) (z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \end{aligned}$$

- INVERSÃO

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

EXEMPLO: Escreva $\frac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ na forma $a + bi$

$$\frac{(-1 + 3i)}{(2 + 5i)} \cdot \frac{(2 - 5i)}{(2 - 5i)} = \frac{-2 + 5i + 6i + 15}{4 + 25} = \frac{13}{29} + \frac{11i}{29}$$

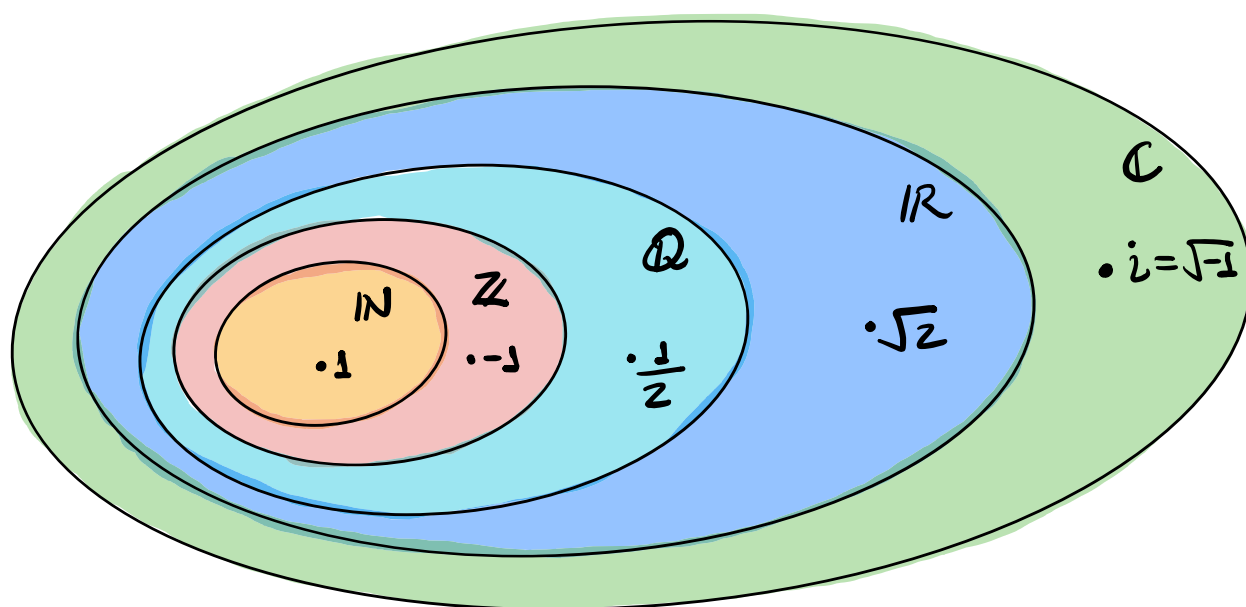
- Verdadeira importância dos complexos: o Teorema Fundamental da Álgebra (veremos à frente)

Todo polinômio com coeficientes complexos tem raiz:

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_k \in \mathbb{C} \quad \forall k$$

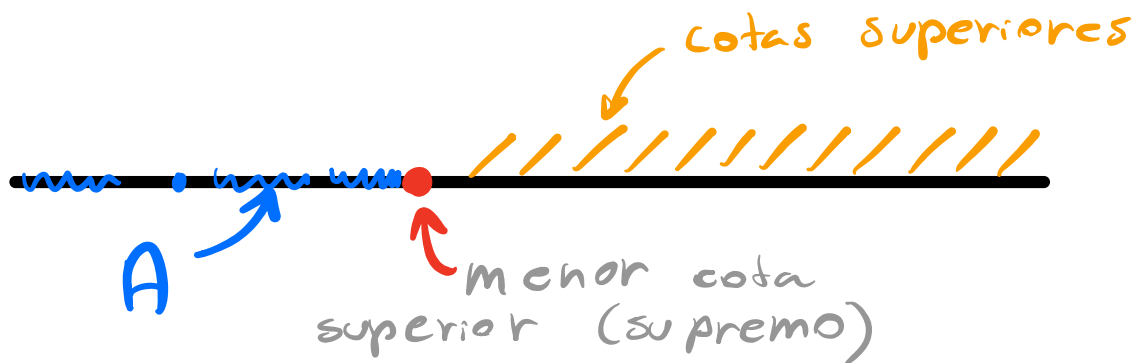
$$\Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tal que } p(z_0) = 0.$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



Pré-Cálculo: O Axioma do Supremo*

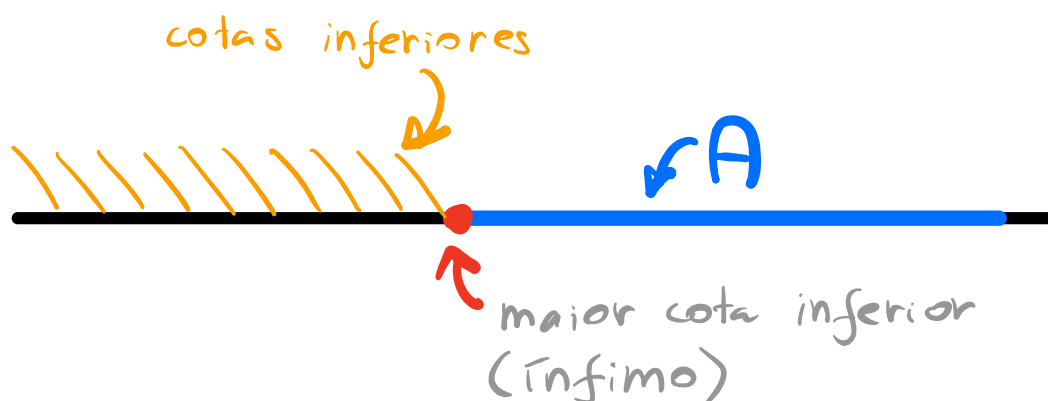
O AXIOMA DO SUPREMO



OBS: pode-se ter $\sup A \in A$ ou então $\sup A \notin A$.

- Se $A \subset \mathbb{R}$ é não-vazio, $c \in \mathbb{R}$ é uma cota superior de A se $x \leq c \ \forall x \in A$.
Se A tem cota superior, dizemos que A é limitado superiormente.
Analogamente, define-se cota inferior.

$$c' \leq x \ \forall x \in A$$



AXIOMA DO SUPREMO: Se $A \subset \mathbb{R}$ é não-vazio e limitado superiormente, então A tem uma cota superior mínima, chamada de suprema de A . Escreve-se $\sup A$.

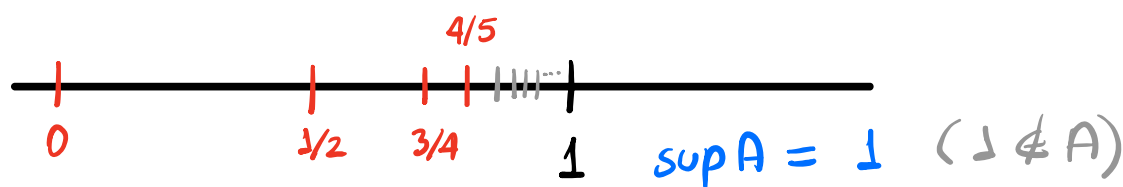
Em outras palavras, se $S = \sup A$, então ele cumpre 2 propriedades:

(i) $x \leq S \quad \forall x \in A$

(ii) Se $x \leq c \quad \forall x \in A$, então $S \leq c$.

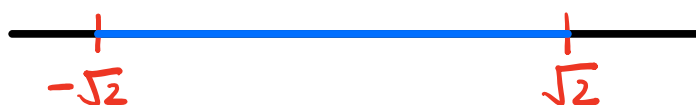
EXEMPLOS:

• $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$



• $B = (-\infty, 0]$ $\sup B = 0 \quad (0 \in B)$

• $C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \}$ $\sup C = \sqrt{2}$



EXEMPLO: Uma forma de definir potências reais é, para $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$,

$$a^\alpha = \sup \{ a^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ e } r \leq \alpha \} \\ = \inf \{ a^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ e } r > \alpha \}$$

Para ver que $\sup = \inf$, note que se $r, s \in \mathbb{Q}$ com $r < \alpha < s$ e $a > 1$,

$$|a^s - a^r| = a^r |a^{s-r} - 1|$$

Para $m \in \mathbb{N}$, podemos escolher r, s tais que $s - r < \frac{1}{m}$. Assim,

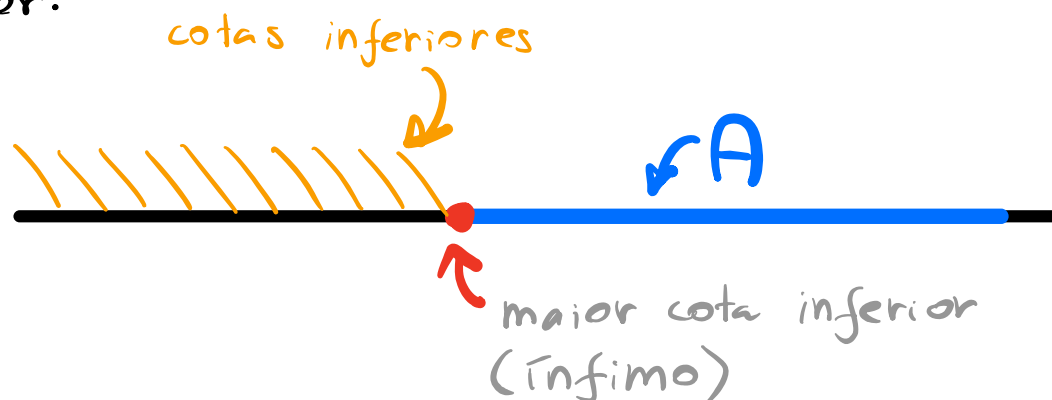
$$|a^{s-r} - 1| < |\sqrt[m]{a} - 1|$$

Mas

$$(a - 1) = [(\sqrt[m]{a})^m - 1^m] \\ = (\sqrt[m]{a} - 1) \cdot (\sqrt[m]{a}^{m-1} + \sqrt[m]{a}^{m-2} + \dots + \sqrt[m]{a} + 1)$$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{a} - 1 = \frac{a - 1}{1 + \sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{a^2} + \dots + \sqrt[m]{a^{m-1}}} \\ < \frac{a - 1}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \square$$

OBS: O axioma do supremo implica um resultado equivalente para limitação inferior.



DEFINIÇÃO: Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente. O ínfimo de A , denotado por $\inf A$, é a maior cota inferior de A . Ou seja, $I = \inf A$ satisfaz

(i) $I \leq x \quad \forall x \in A$

(ii) Se $c \leq x \quad \forall x \in A$, então $c \leq I$.

TEOREMA (ÍNFIIMO): Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente, então A tem uma cota inferior máxima, conhecida como ínfimo de A e denotada por $\inf A$.

PROVA: Se A é limitado inferiormente,

$-A = \{-x \mid x \in A\}$ é limitado superiormente. Logo, existe $M = \sup(-A)$. Segue que

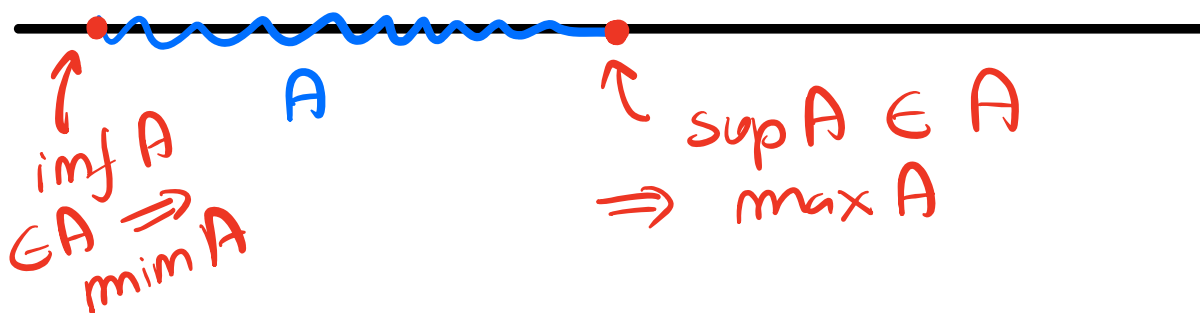
$$(i) -x \leq M \quad \forall x \in A \Rightarrow -M \geq x \quad \forall x \in A$$

$$(ii) \text{ se } -x \leq c \quad \forall x \in A, \text{ então } M \leq c.$$

Logo, se $-c \leq x \quad \forall x \in A$, então $-c \leq -M$.

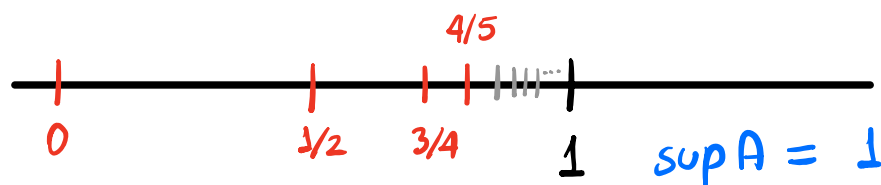
As propriedades (i) e (ii) implicam que $-M = \inf A$. $\square$

OBS: Se $\sup A = M \in A$, diz-se que M é o máximo de A , e escreve-se $M = \max A$. Analogamente, se $\inf A = m \in A$, diz-se que m é o mínimo de A , e escreve-se $m = \min A$.



EXEMPLOS:

- $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$



Como $1 \notin A$, 1 não é mínimo de A .

- $B = (-\infty, 0]$ $\sup B = 0$

$$0 \in B \Rightarrow 0 = \max B$$

Com o axioma do supremos podemos provar que a reta real não tem buracos.

INTERVALOS ENCAIXANTES

$I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, forma uma sequência de intervalos encaixantes se $I_n \supset I_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Logo: } I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

COMPLETUDE/CONTINUIDADE EM $\mathbb{R}$

TEOREMA: Se $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de intervalos encaixantes tal que $I_n = [a_n, b_n]$ e $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}, \text{ onde } c \in \mathbb{R}.$$


PROVA:

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Temos

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

Então A e B são limitados. Daí, existem

$$\alpha = \sup A, \quad \beta = \inf B, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Repare que $\begin{cases} a_n \leq \alpha & \forall n \in \mathbb{N} \\ \beta \leq b_n & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (*)$

Temos $\alpha \leq \beta$, senão $\beta < \alpha$ e teríamos $\beta < a_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ pois $\alpha = \sup A$. Logo, como $\beta = \inf B$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{n_1} < a_{n_0}$.

Se $n_1 > n_0$, segue que $b_{n_1} < a_{n_0} \leq a_{n_1} \Rightarrow b_{n_1} < a_{n_1}$, absurdo.

Se $n_0 > n_1$, segue que $b_{n_0} \leq b_{n_1} < a_{n_0} \Rightarrow b_{n_0} < a_{n_0}$, absurdo.

Assim, $\alpha \leq \beta$. Repare que (*) implica que $[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Como

$b_n - a_n \rightarrow 0$, segue de $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$ que

$$|\beta - \alpha| \leq |b_n - a_n| \rightarrow 0$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = c \in \mathbb{R}$.

Logo, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$, com $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Pré-Cálculo: Representação Decimal e Aproximação Racional

REPRESENTAÇÃO DECIMAL

REPRESENTAÇÃO DECIMAL FINITA

$$r = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$$

São números da forma

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n},$$

onde $a_0 \in \mathbb{N}^*$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

EXEMPLO: $0,123 = \frac{123}{1000}$

Números assim são SEMPRE racionais.

REPRESENTAÇÃO DECIMAL INFINITA

- Nem todo racional tem representação finita.

EXEMPLO

$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,\overline{3}$$

$$\frac{1}{11} = 0,090909\dots = 0,\overline{09}$$

→ dízima periódica

$$\frac{1}{2} = 0,50000\dots = 0,5\bar{0}$$

- Se x tem representação infinita com dízima periódica, então $x \in \mathbb{Q}$.

PROVA: $x = a_0, a_1 \dots a_n \overline{a_{n+1} \dots a_{n+p}}$

$$= a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \cdot 0, \overline{a_{n+1} \dots a_{n+p}}$$

Então basta provar para $x = 0, \overline{a_1 \dots a_p}$.

Seja $\alpha = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_p}{10^p}$. Então

$$x = \alpha + \frac{\alpha}{10^p} + \frac{\alpha}{(10^p)^2} + \frac{\alpha}{(10^p)^3} + \dots$$

$$= \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{10^p} + \left(\frac{1}{10^p}\right)^2 + \dots \right)$$

$$= \alpha \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^p}} = \alpha \cdot \frac{10^p}{10^p - 1} \in \mathbb{Q}. \quad \square$$

- Vale a recíproca: se $x \in \mathbb{Q}$, então x tem representação decimal finita ou periódica.

PROVA: $x = p/q \in \mathbb{Q}$.

Suponha $0 < p < q$.

n_1 menor inteiro tal que $10^{n_1} \cdot p \geq q$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{1}{10^{n_1}} \cdot \frac{p \cdot 10^{n_1}}{q} = \frac{1}{10^{n_1}} \cdot \frac{a_1 q + p_1}{q}$$

$$= \frac{a_1}{10^{n_1}} + \frac{1}{10^{n_1}} \cdot \frac{p_1}{q}, \quad p_1 \in \{0, 1, \dots, q-1\}$$

$$= \frac{a_1}{10^{n_1}} + \frac{1}{10^{n_1}} \cdot \frac{1}{10^{n_2}} \cdot \frac{p_1 \cdot 10^{n_2}}{q}$$

$$= \frac{a_1}{10^{n_1}} + \frac{1}{10^{n_1+n_2}} \cdot \frac{a_2 q + p_2}{q},$$

$$p_2 \in \{0, 1, \dots, q-1\}$$

$$= \frac{a_1}{10^{n_1}} + \frac{a_2}{10^{n_1+n_2}} + \frac{1}{10^{n_1+n_2}} \cdot \frac{p_2}{q}$$

Como p_i tem apenas q possibilidades, em algum momento ele é zero (e a expansão é finita) ou então repete algum $p_j \neq 0$ anterior ($j < i$), e a partir daí tudo se repete e temos uma dízima periódica. $\square$

- Assim, $x \notin \mathbb{Q}$ se e só se possui expansão decimal infinita e não-periódica.

EXEMPLO: Na calculadora:

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237309\dots$$

Temos duas seqüências de aproximação por racionais:

aproximação
por falta:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1,4 \\ a_2 &= 1,41 \\ a_3 &= 1,414 \\ a_4 &= 1,4142 \end{aligned}$$

aproximação
por excesso:

$$\begin{aligned} b_0 &= 2 \\ b_1 &= 1,5 \\ b_2 &= 1,42 \\ b_3 &= 1,415 \\ b_4 &= 1,4143 \end{aligned}$$

Temos $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq \sqrt{2} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$,
com

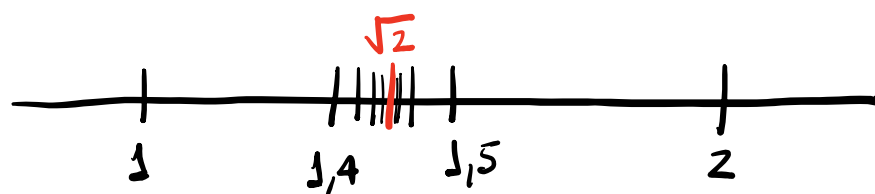
$$|b_n - a_n| = \frac{1}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então $I_n = [a_n, b_n]$ forma uma seqüência de intervalos encaixantes onde $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Pela continuidade dos reais, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\{C\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Como $a_n < \sqrt{2} < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, segue
que $C = \sqrt{2}$.



TODO NÚMERO REAL PODE SER REPRESENTADO POR UMA EXPANSÃO DECIMAL. A EXPANSÃO É FINITA OU PERIÓDICA SE, E SOMENTE SE, O NÚMERO FOR RACIONAL. NÚMEROS IRRACIONAIS POSSUEM EXPANSÃO INFINITA E NÃO PERIÓDICA.

Parte I: Pré-Cálculo

FUNÇÕES

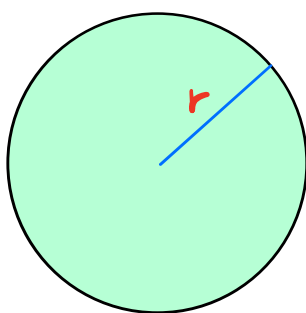
Pré-Cálculo: Funções

FUNÇÕES

- Surgem quando uma quantidade depende de outra(s).

EXEMPLOS

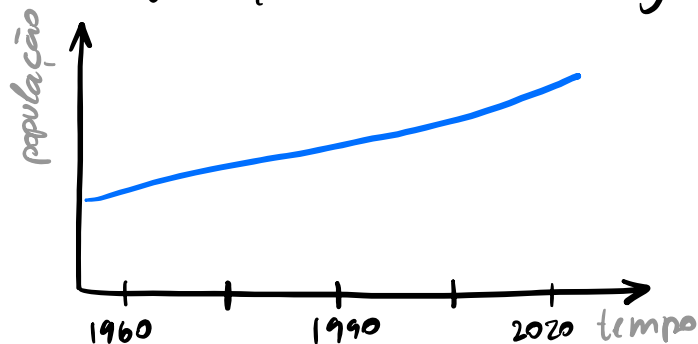
(a)



A área A de um círculo é função de seu raio r :

$$A = \pi r^2$$

(b) População mundial é função do tempo:

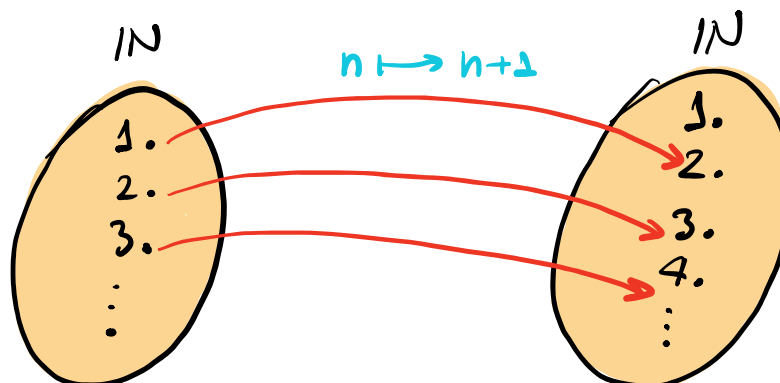


ANO	POPULAÇÃO (EM MILHÕES)
1960	3.032
1970	3.690
1980	4.442
1990	5.294
2000	6.144
2010	6.970
2020	7.821

UMA FUNÇÃO f ENTRE DOIS CONJUNTOS A E B É UMA REGRA QUE ASSOCIA CADA ELEMENTO $x \in A$ A UM ÚNICO ELEMENTO $f(x) \in B$

EXEMPLOS

- Função sucessor

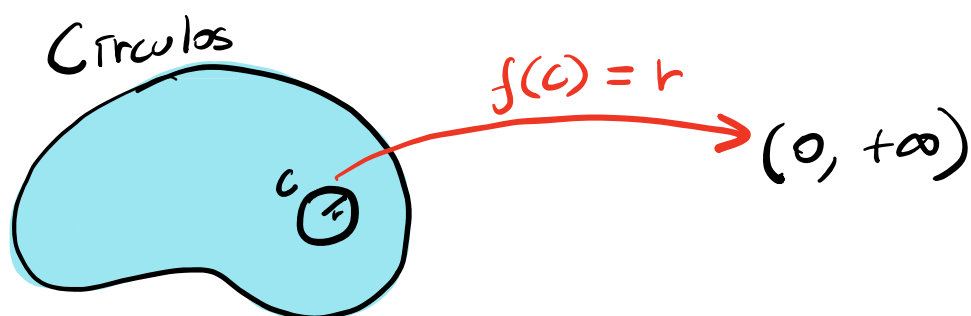


- Função quadrática

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

- Função raio:



- Toda sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow A$, onde $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{n} : \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$

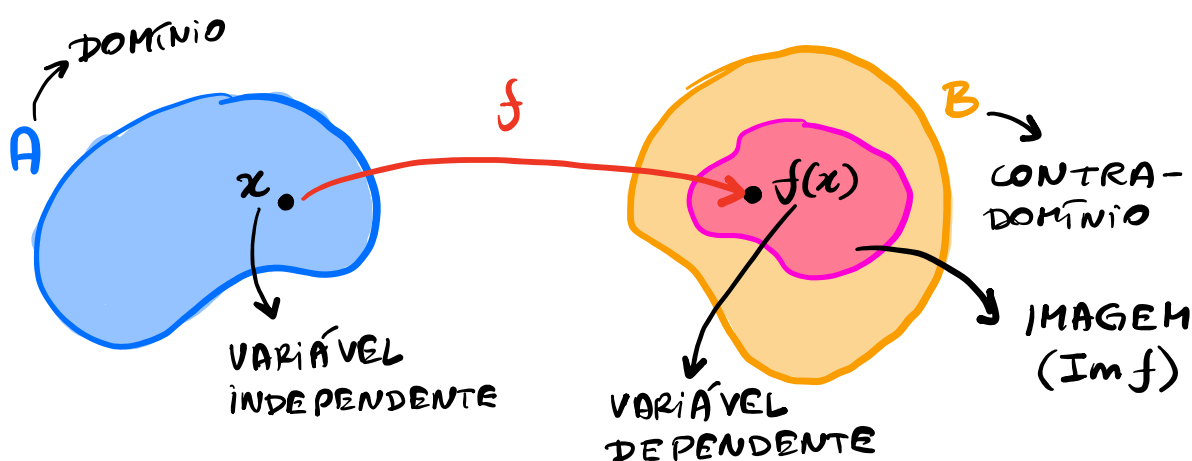
$$n \mapsto \frac{1}{n}$$

De um modo geral: $f(n) = a_n$.

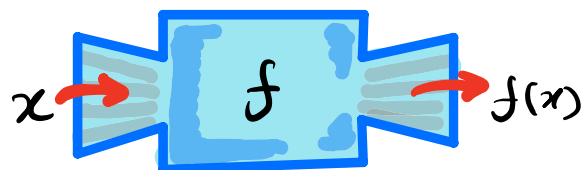
- PG é uma função:

$$a_n = a_0 q^n \quad f(n) = a_0 q^n$$

- DOMÍNIO, CONTRA-DOMÍNIO, IMAGEM



$$\text{Im } f = \{ y \in B \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in A \}$$



OBS: o Cálculo de uma variável lida com funções $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$

EXEMPLOS

(a) $f(x) = \sqrt{\underbrace{x+5}_{\geq 0}}$

$$x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$$

• Logo, o domínio de f é o intervalo $[-5, +\infty)$

• Como $\sqrt{u} \geq 0$, $\text{Im } f = [0, +\infty)$

(b) $g(x) = \frac{1}{\underbrace{x^2-1}_{\neq 0}}$

$$x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

• Logo, o domínio de g é $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

• $x^2 = |x|^2$.

$|x|$ grande $\Rightarrow g(x)$ perto de 0

$|x| < 1$, $|x|$ perto de 1 $\Rightarrow g(x) \rightarrow +\infty$

$|x| > 1$, $|x|$ perto de 1 $\Rightarrow g(x) \rightarrow -\infty$

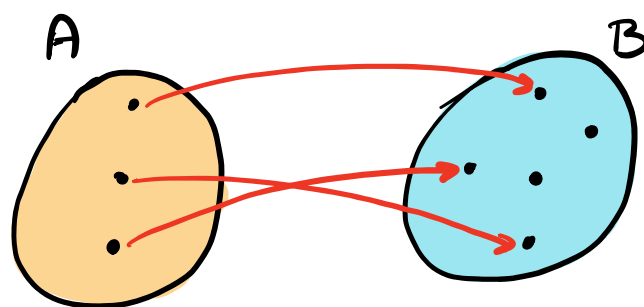
$g(0) = -1$ é o maior valor em $(-1, 1)$

$\Rightarrow \text{Im } f = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

FUNÇÃO INJETORA/SOBREJETORA/BIJETORA

- $f: A \rightarrow B$ é **injetora** (injetiva) se

$$\forall x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



EXEMPLOS

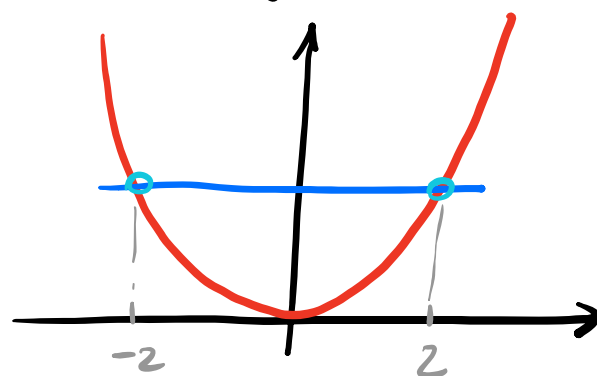
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 5x - 1$ é injetora

$$5x_1 - 1 = 5x_2 - 1 \Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

$$2^2 = (-2)^2 = 4$$

não é injetora



MAS, restringindo o domínio:

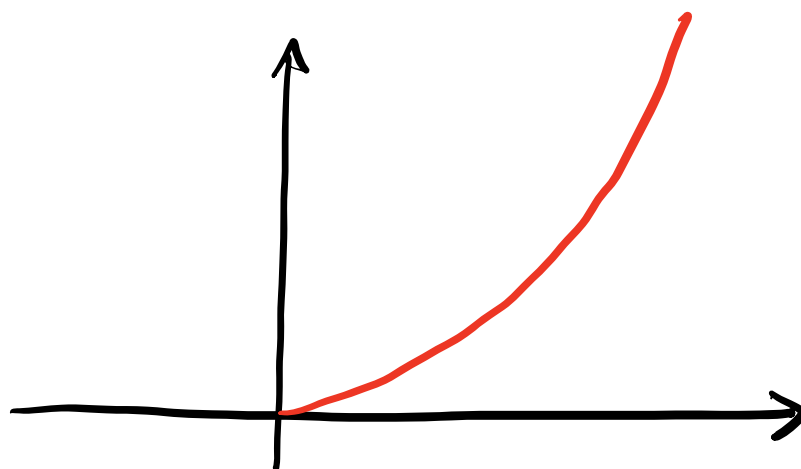
$$g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{é injetora}$$

$$x \mapsto x^2$$

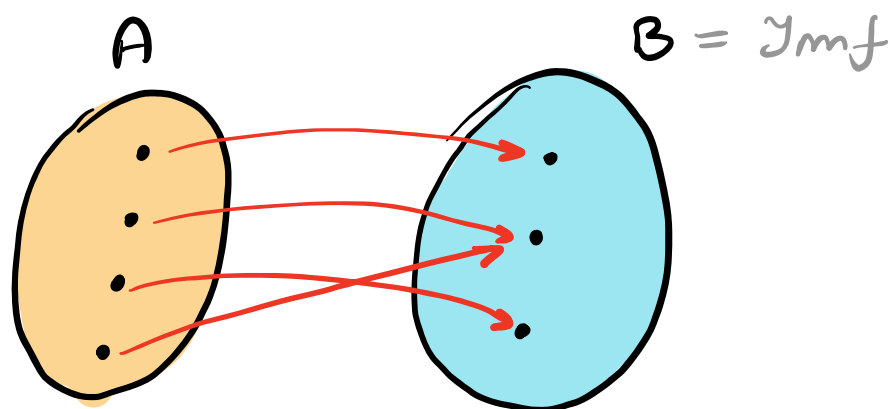
pois $x_1 \neq x_2 \in [0, +\infty) \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2$.

$$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$



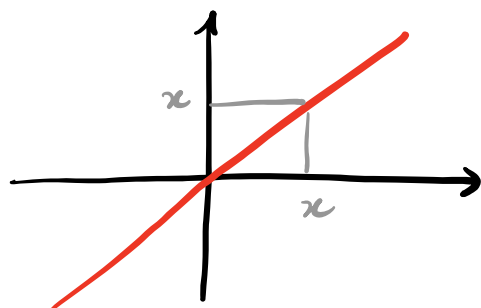
- $f: A \rightarrow B$ é **sobrejetora** (sobrejetiva) se $\forall y \in B, \exists x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = y_0$.



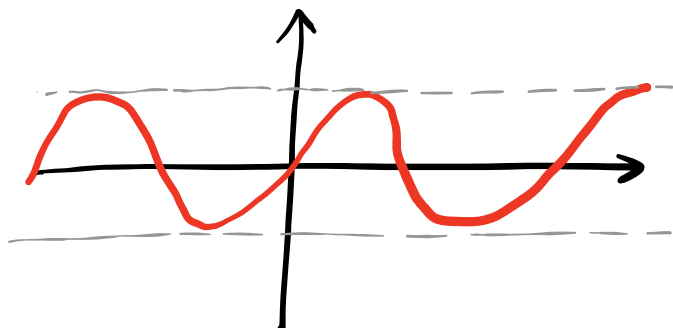
OBS: $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, $\text{Im } f = B$.

EXEMPLOS

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (função identidade) é sobrejetora
 $x \mapsto x$



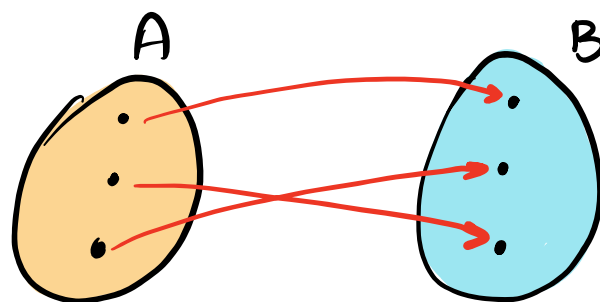
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetora
 $x \mapsto \sin x$



MAS, COM OUTRO CONTRADOMÍNIO:

- $g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ é sobrejetiva
 $x \mapsto \sin x$

- $f: A \rightarrow B$ é **bijetora** (bijetiva) se for injetora e sobrejetora

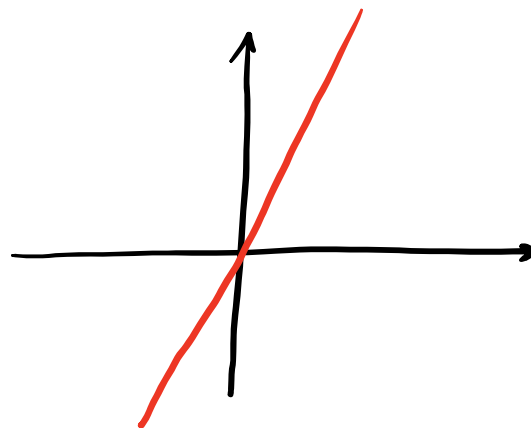


EXEMPLOS

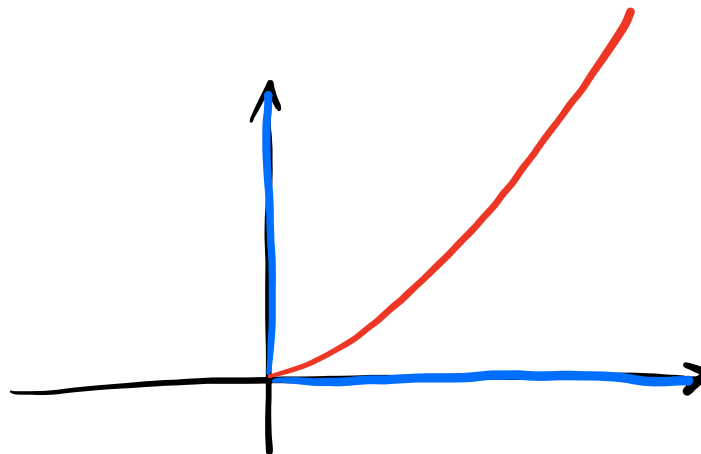
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetora:
 $x \mapsto 3x$

- injetora: $3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

- sobrejetora: $y \in \mathbb{R}$. $y = 3x \Leftrightarrow x = \frac{y}{3}$



• $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é bijetora
 $x \mapsto x^2$

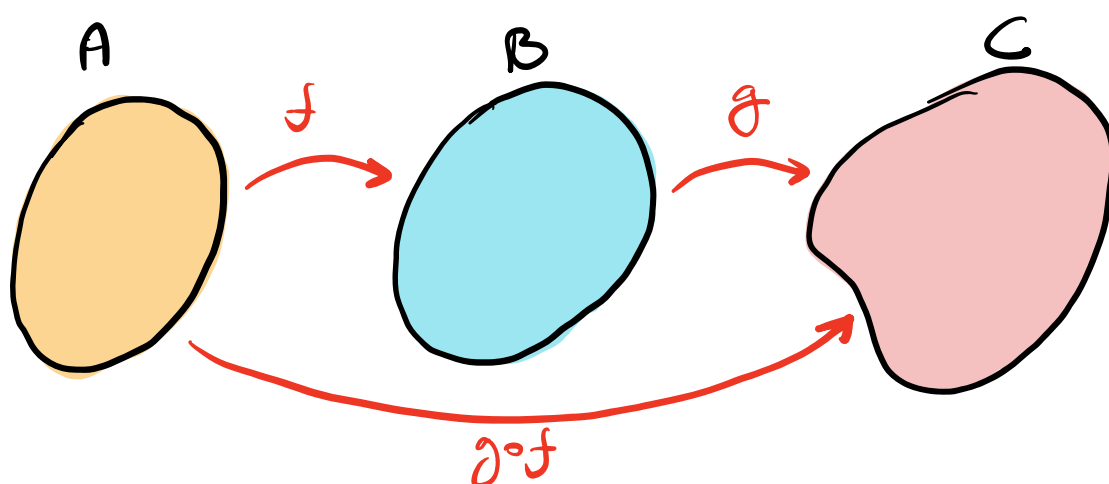


OBS: Se $f: A \rightarrow B$ é bijetora, então,
 $\forall y \in B$, a equação $f(x) = y$ possui
 exatamente uma única solução $x \in A$.

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Dadas $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, definimos a função composta $g \circ f: A \rightarrow C$ por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



OBS: É preciso apenas que $\text{Im } f \subset \text{Dom } g$

EXEMPLO

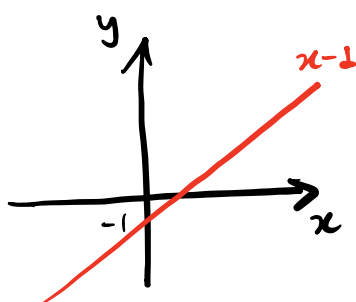
- $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x-1)^2$

é a composta

$$h = g \circ f, \text{ onde}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

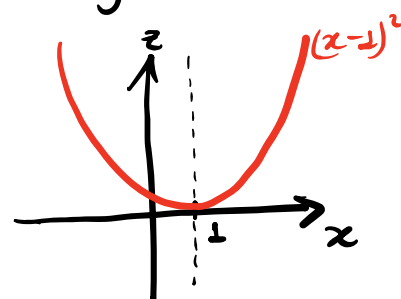
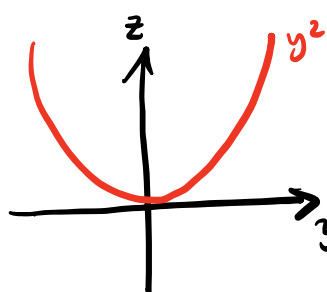
$$x \mapsto x-1$$



e

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto y^2$$

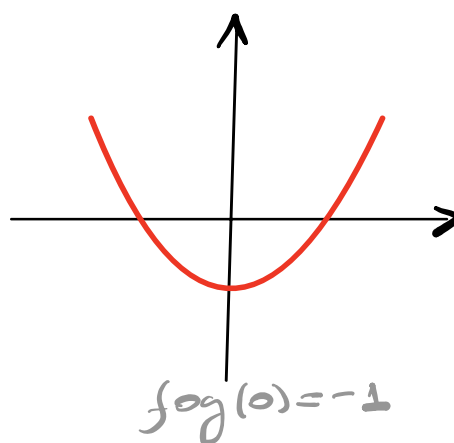
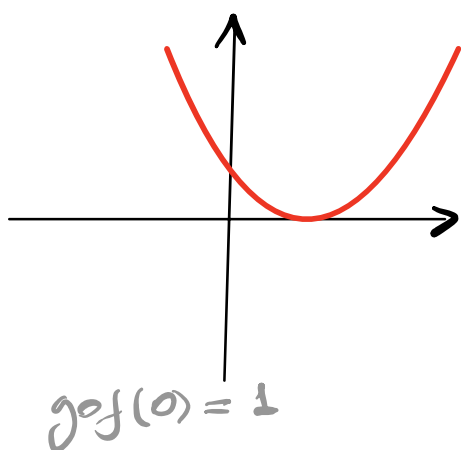


OBS: A ordem da composição importa.
Em geral, $g \circ f \neq f \circ g$.

EXEMPLO: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x-1$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2$

$$g \circ f(x) = (x-1)^2$$

$$f \circ g(x) = x^2 - 1$$



FUNÇÃO INVERSA

Dada $f: A \rightarrow B$ bijetora, a sua inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$ é tal que

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in B$$

EXEMPLOS:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto ax + b \quad (a \neq 0)$

$$ax + b = y \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$$

A inversa é $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y \mapsto \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$.

Repare que

$$f^{-1} \circ f(x) = \frac{1}{a}(ax + b) - \frac{b}{a} = x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = x$$

e

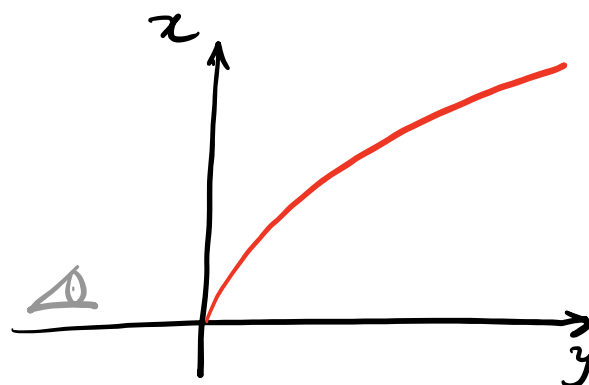
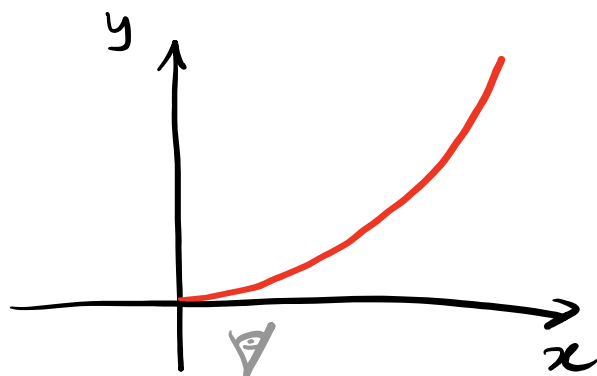
$$f \circ f^{-1}(y) = a\left(\frac{1}{a}y - \frac{b}{a}\right) + b = y - b + b = y$$

- $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$
 $x \mapsto x^2$

A inversa é a função raiz quadrada:

$$f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$y \mapsto \sqrt{y}$$

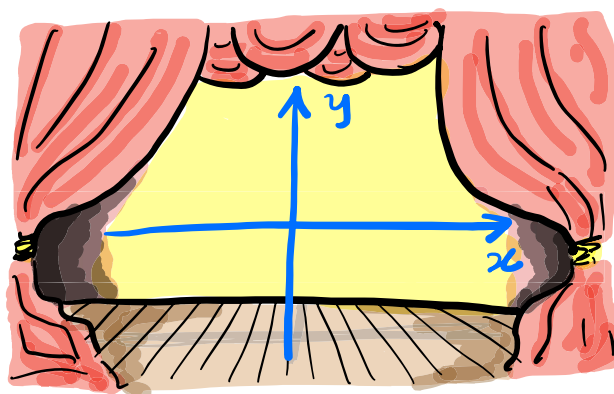


Pré-Cálculo: Gráfico de Funções

GRÁFICO

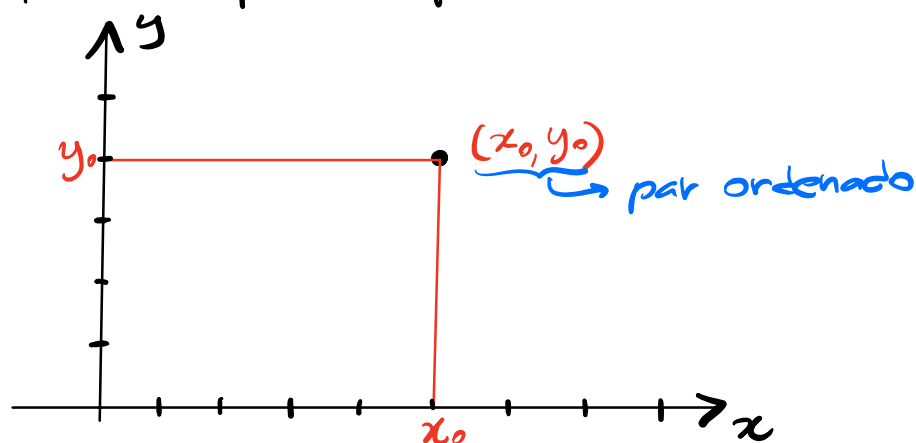
São de suma importância no Cálculo!

- Traçados no plano cartesiano, o palco do Cálculo:



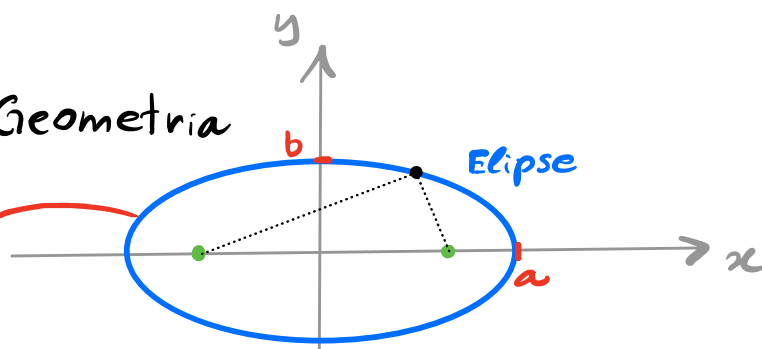
Descartes (1596-1650)

- Localização de pontos por coordenadas:



- Equações $\longleftrightarrow$ Geometria

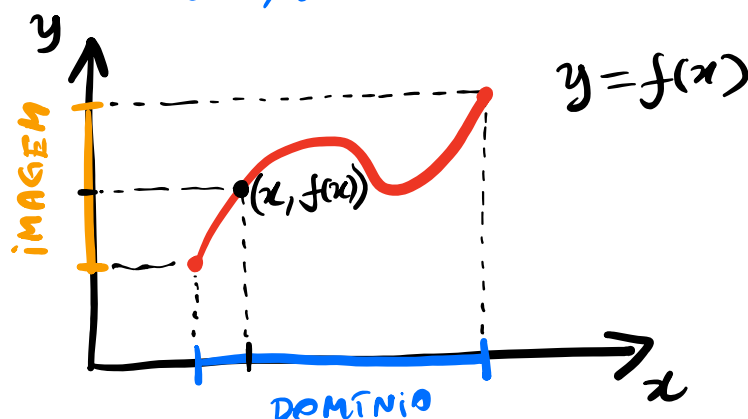
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



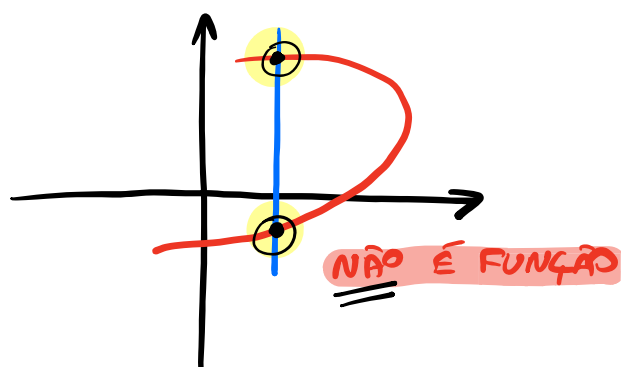
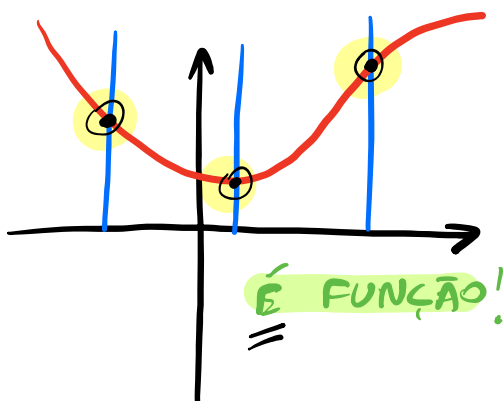
DEFINIÇÃO FORMAL DE GRÁFICO

Dada $f: A \rightarrow B$, seu gráfico é o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

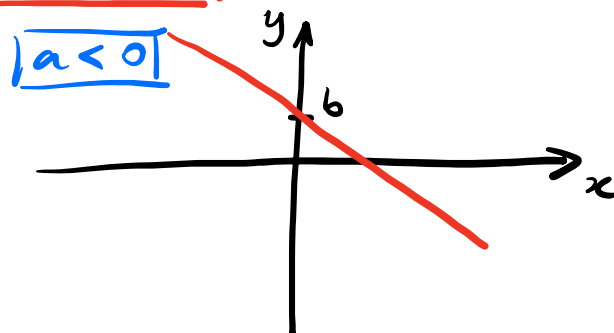
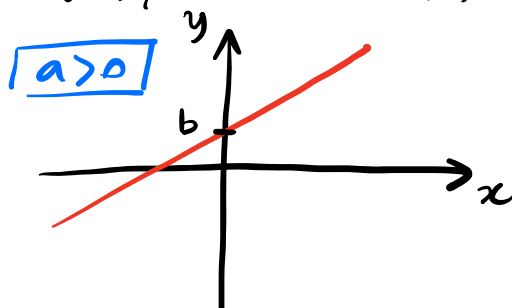


Como uma função associa cada $x \in A$ a um único $f(x) \in B$, uma linha vertical só intercepta o gráfico de uma função em no máximo um ponto.

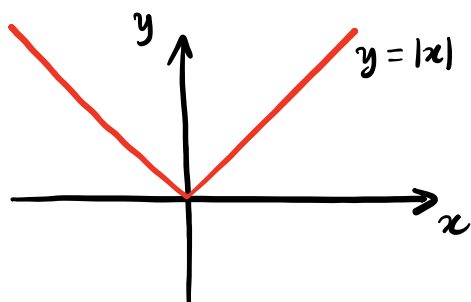


EXEMPLOS

- EQUAÇÃO DA RETA : $f(x) = ax + b$ ^{inclinação}



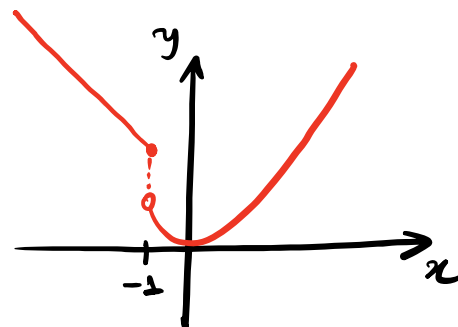
- FUNÇÃO MÓDULO : $f(x) = |x|$



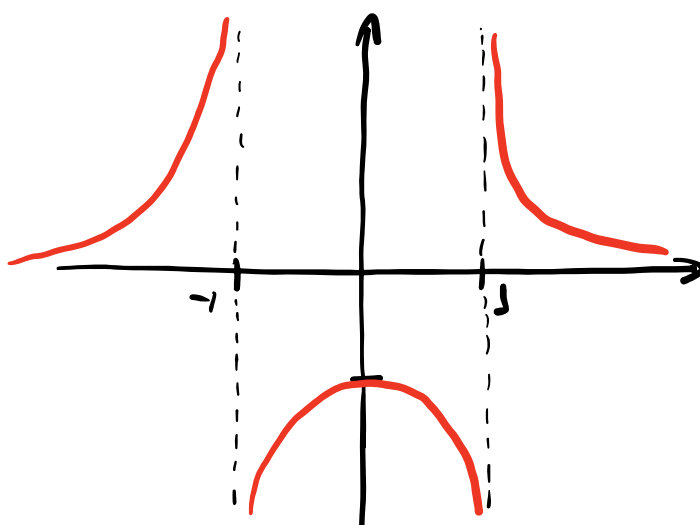
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES :

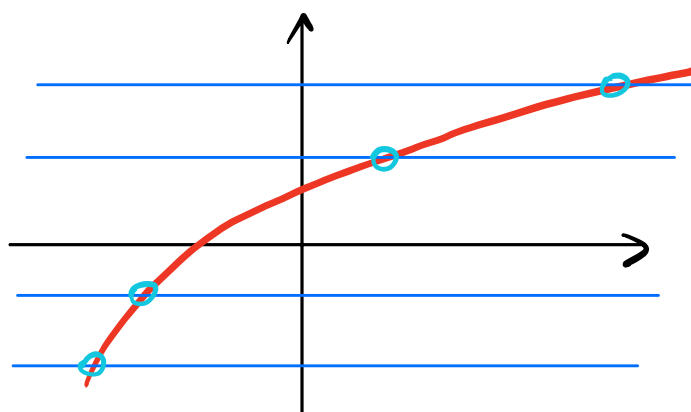
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq -1 \\ x^2, & \text{se } x > -1 \end{cases}$$



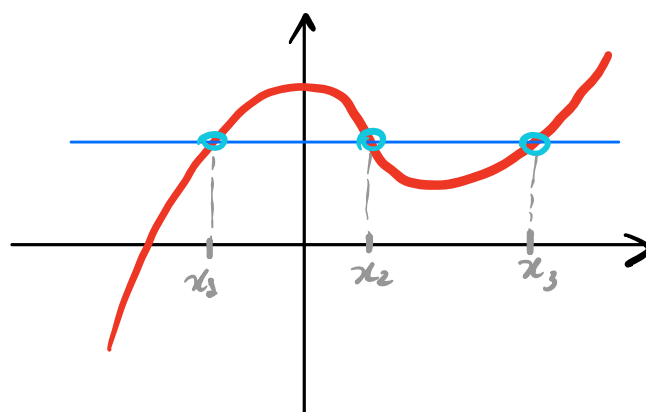
- $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$



• Se $f(x)$ é injetora, linhas horizontais cruzam seu gráfico em no máximo 1 ponto:

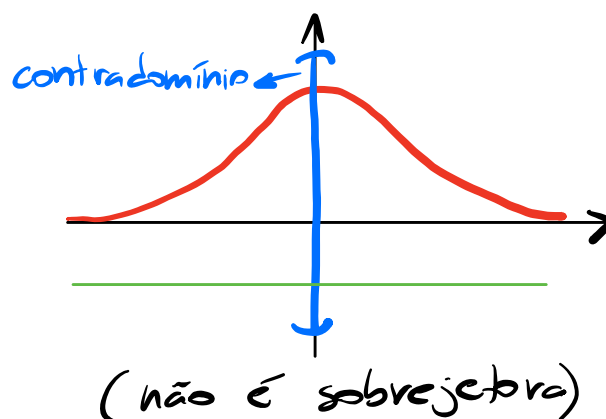
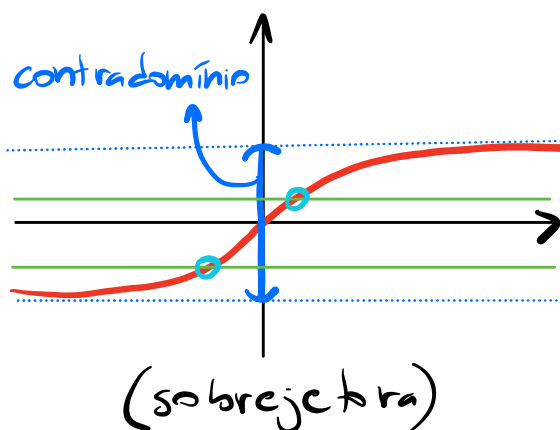


(injetora)

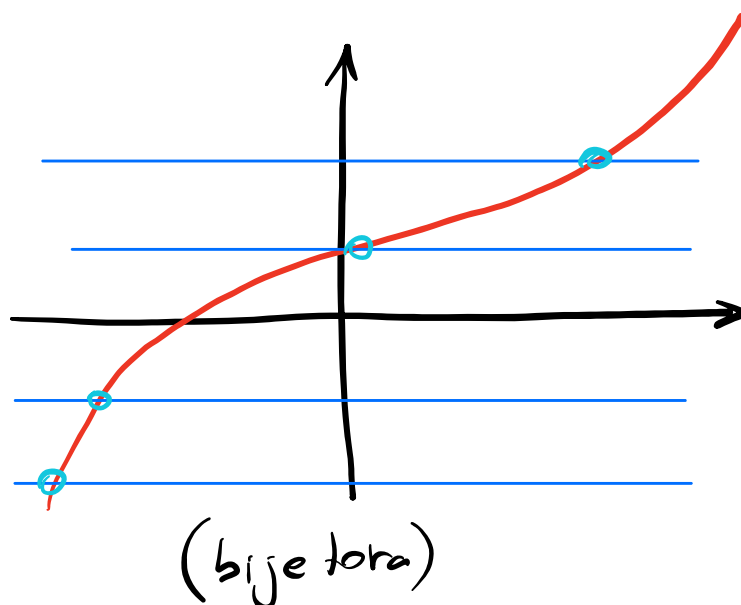


(não é injetora)
 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$

- Se $f(x)$ é sobrejetora, toda linha horizontal no seu contradomínio cruza o gráfico

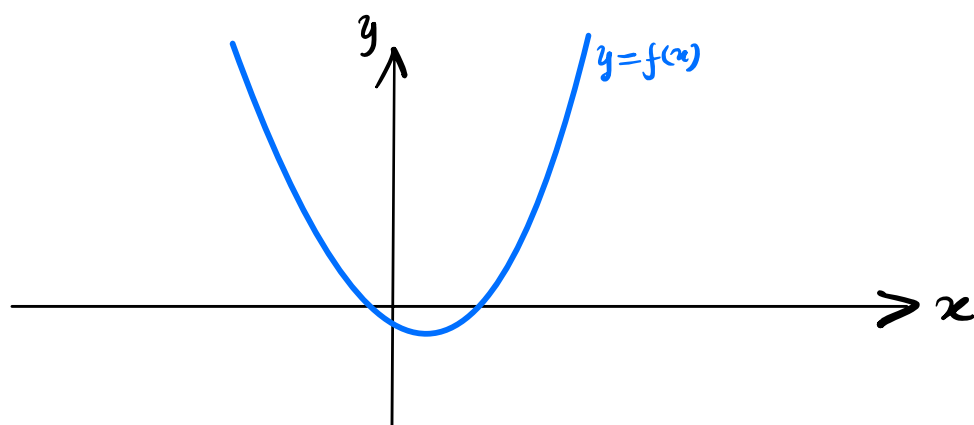


- Se f é bijetora, então todas as linhas horizontais no seu contradomínio cruzam o gráfico exatamente uma vez



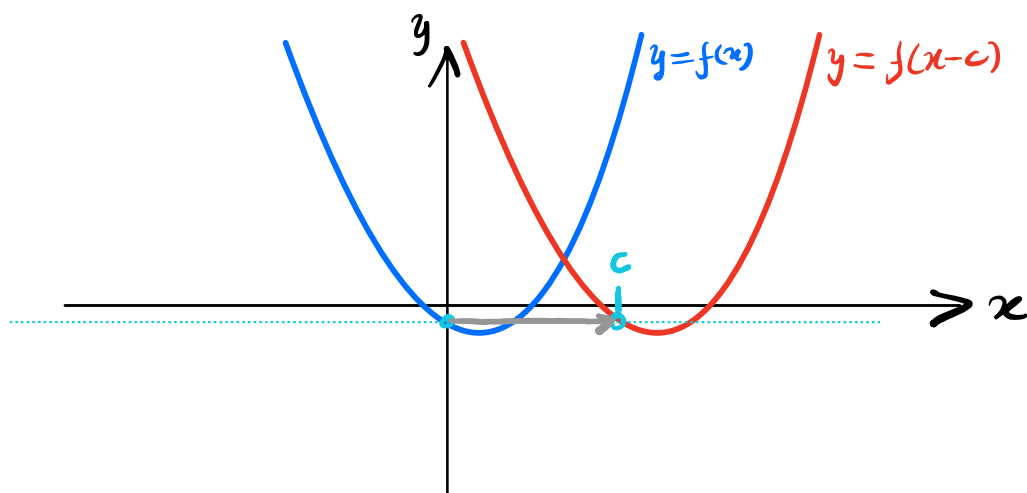
TRANSLAÇÃO E REFLEXÃO

$A, B \subset \mathbb{R}$. Considere $f: A \rightarrow B$



• TRANSLAÇÃO HORIZONTAL

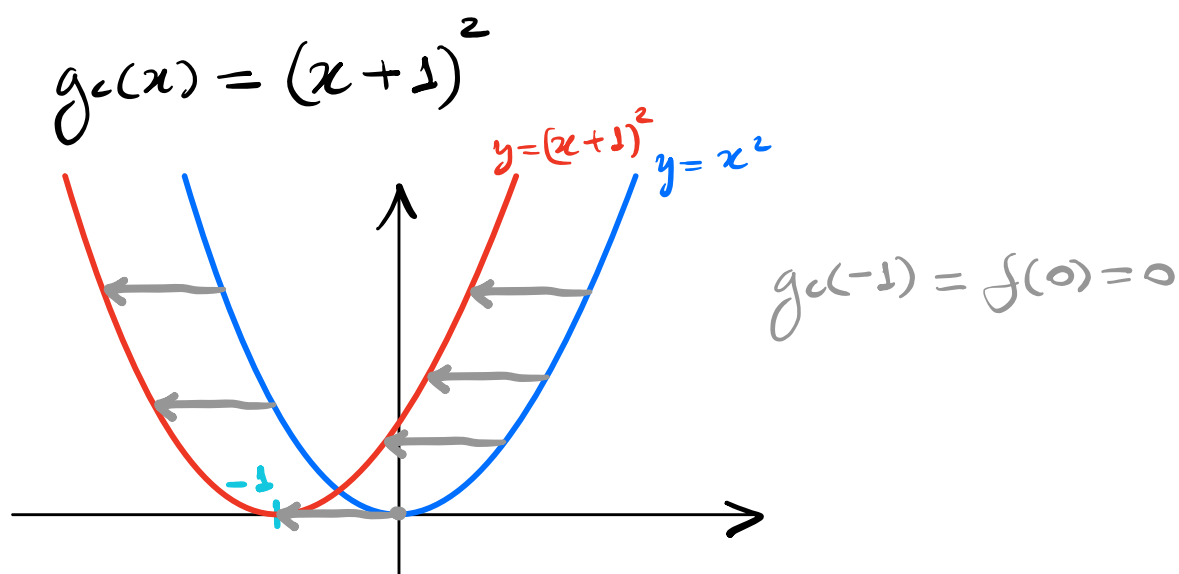
Seja $c \in \mathbb{R}$. $g_c(x) = f(x-c)$



OBS: $g_c: A' \rightarrow B$, onde $A' = \{a+c \mid a \in A\}$
 $= A+c$

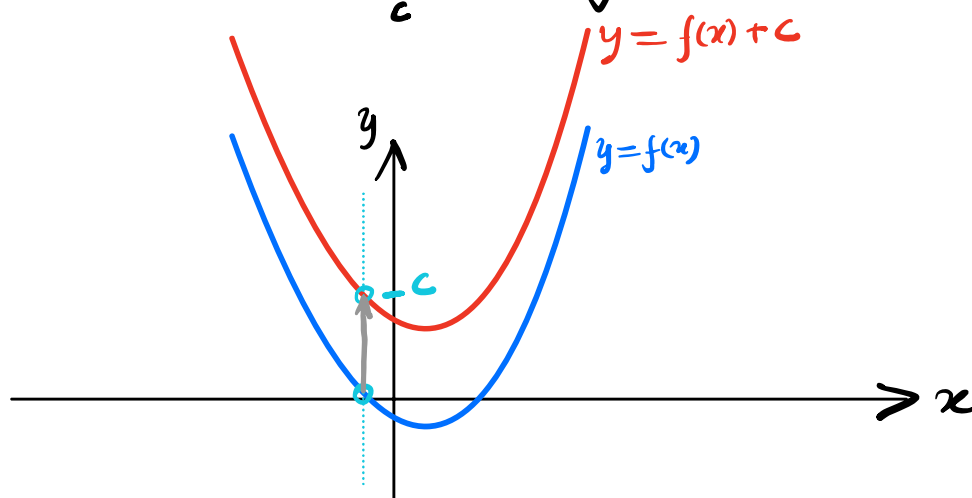
OBS 2: $g_c = f \circ \tau_c$, onde $\tau_c: A' \rightarrow B$
 $x \mapsto x - c$

EXEMPLO $f(x) = x^2$, $c = -1$



• TRANSLAÇÃO VERTICAL

Seja $c \in \mathbb{R}$. $h_c(x) = f(x) + c$

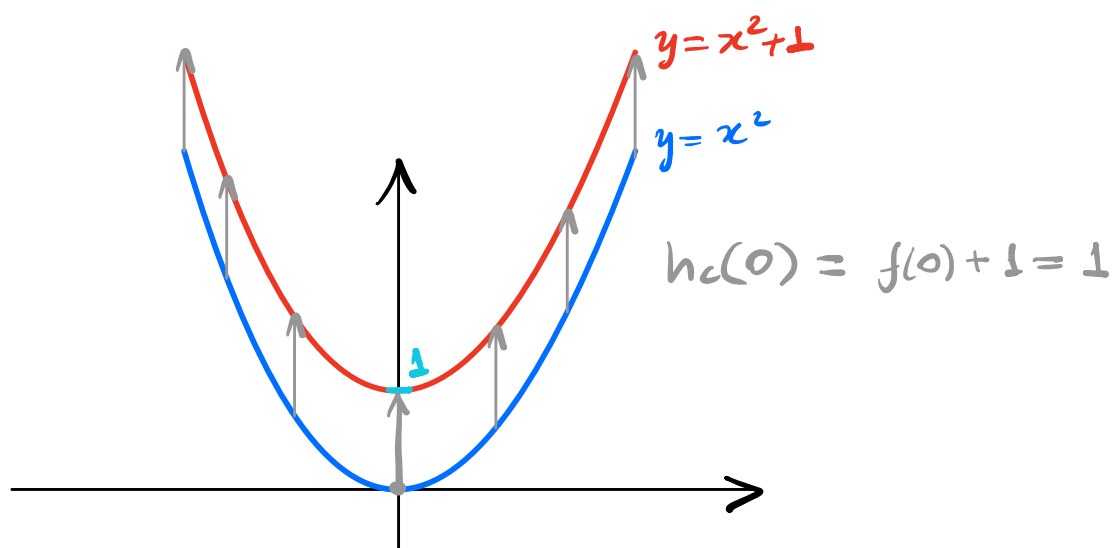


OBS: $h_c: A \rightarrow B'$, onde $B' = \{b+c \mid b \in B\}$
 $= B+c$

OBS 2: $h_c = \tau_c \circ f$, onde $\tau_c: B \rightarrow B'$
 $y \mapsto y+c$

EXEMPLO

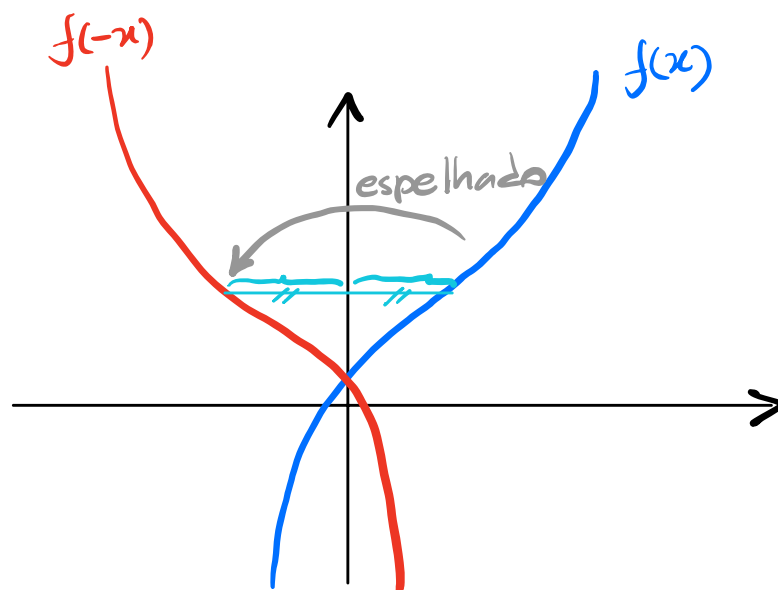
$f(x) = x^2$, $c = 1$



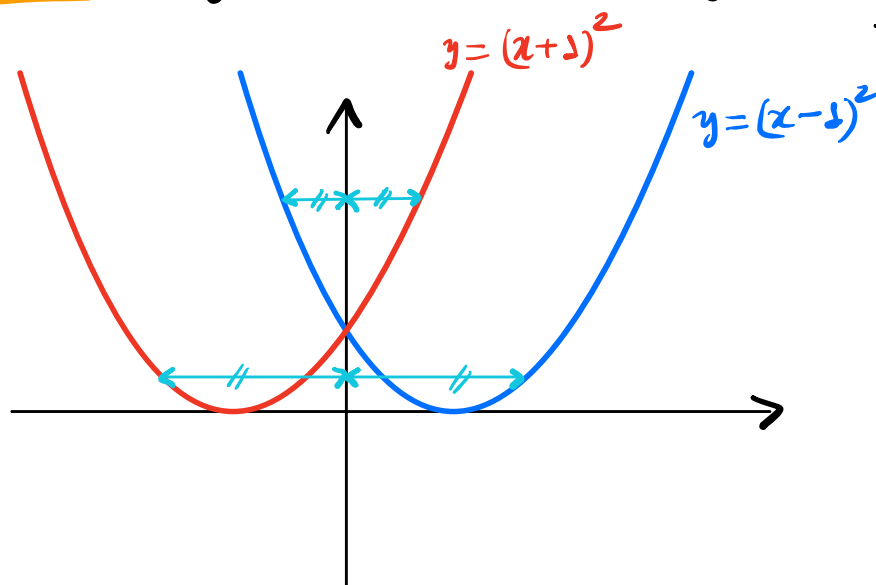
• REFLEXÃO HORIZONTAL

$x \in A' \mapsto f(-x) \in B$

onde $A' = \{-a \mid a \in A\} = -A$

EXEMPLO:

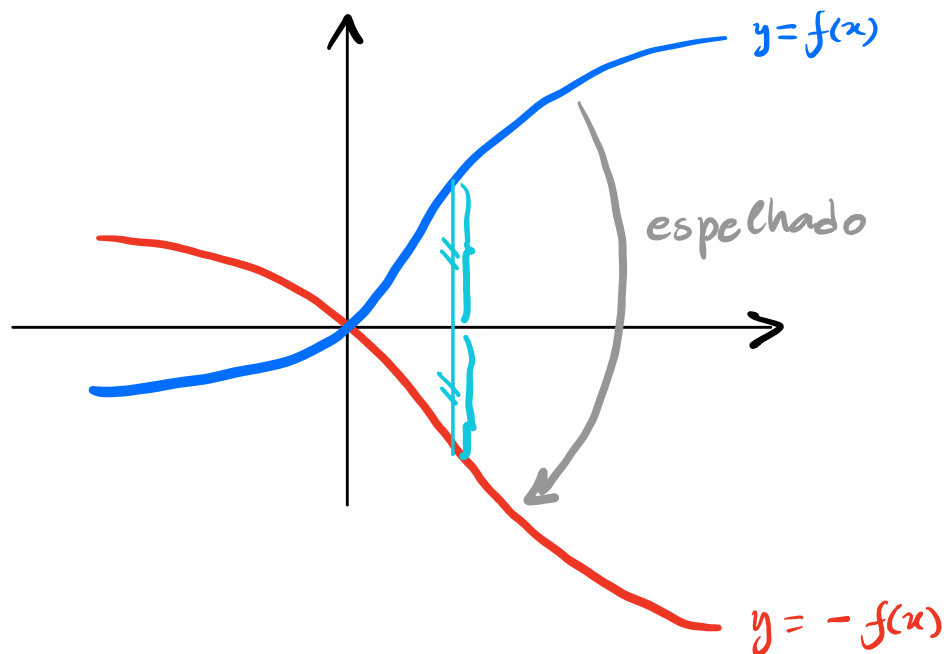
$$f(x) = (x-1)^2 \Rightarrow f(-x) = (-x-1)^2 = (x+1)^2$$



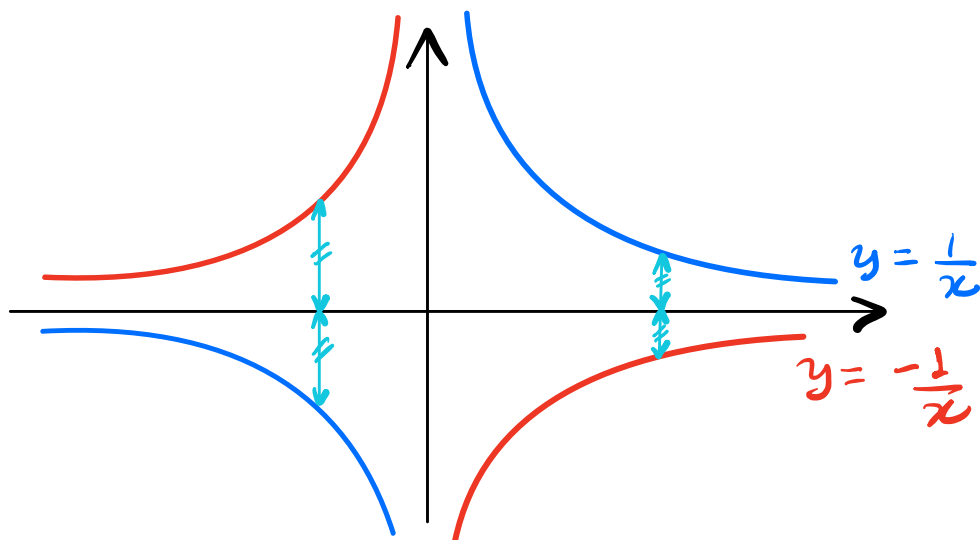
• REFLEXÃO VERTICAL

$$x \in A \mapsto -f(x) \in B'$$

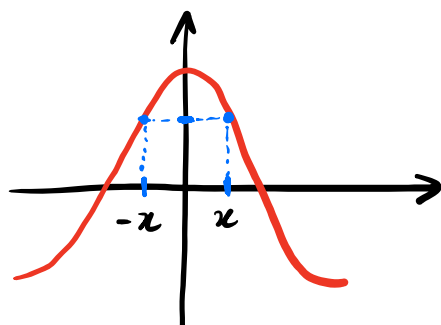
onde $B' = \{-b \mid b \in B\} = -B$



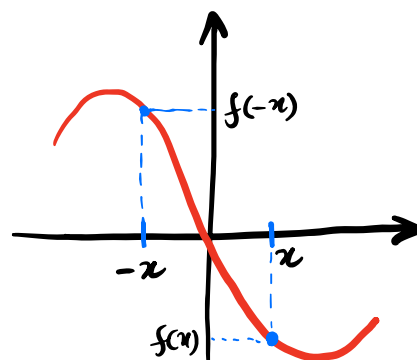
EXEMPLO: $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \Rightarrow -f(x) = -\frac{1}{x}$



SIMETRIA DE FUNÇÕES



FUNÇÃO PAR:
 $f(x) = f(-x)$

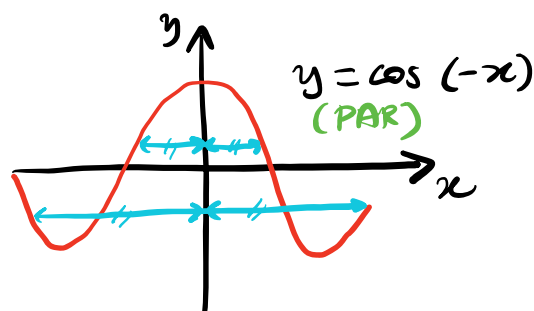
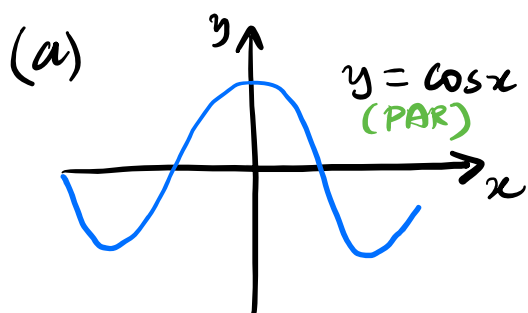


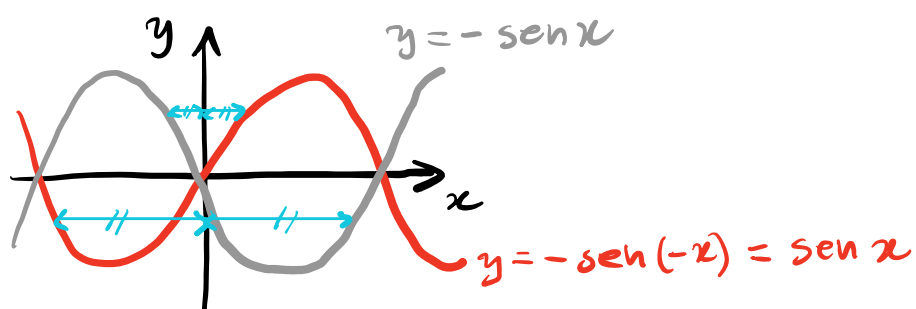
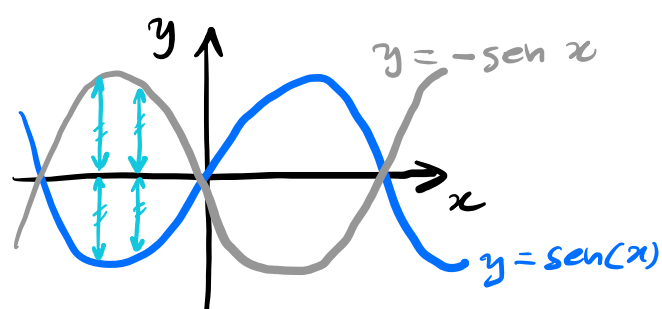
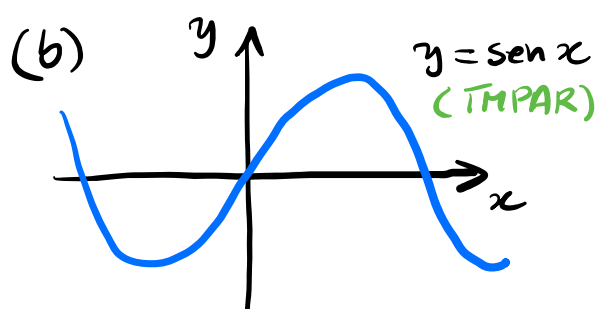
FUNÇÃO ÍMPAR:
 $f(-x) = -f(x)$

OBS: • f par $\Rightarrow f$ é invariante por reflexão horizontal ($f(x) = f(-x)$)

• f ímpar $\Rightarrow f$ é invariante pela composição de uma reflexão horizontal com uma vertical ($f(x) = -f(-x)$)

EXEMPLOS:



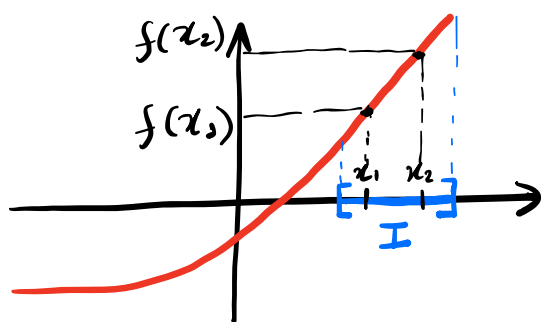


MONOTONICIDADE

- f é crescente num intervalo I se

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1 < x_2 \in I$$

(alguns autores requerem $f(x_1) < f(x_2)$ e chamam o caso $f(x_1) \leq f(x_2)$ de função não-decrescente)

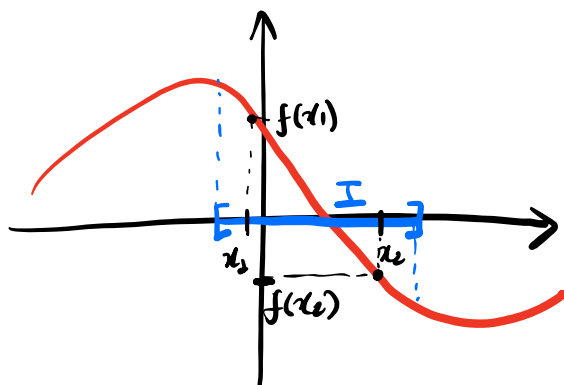


- se $f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1 < x_2$ em I , então f é estritamente crescente (alguns chamam este caso de crescente)

- f é decrescente em I se

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x_1 < x_2 \in I$$

(alguns autores requerem $f(x_1) > f(x_2)$ e chamam o caso $f(x_1) \geq f(x_2)$ de função não-crescente)

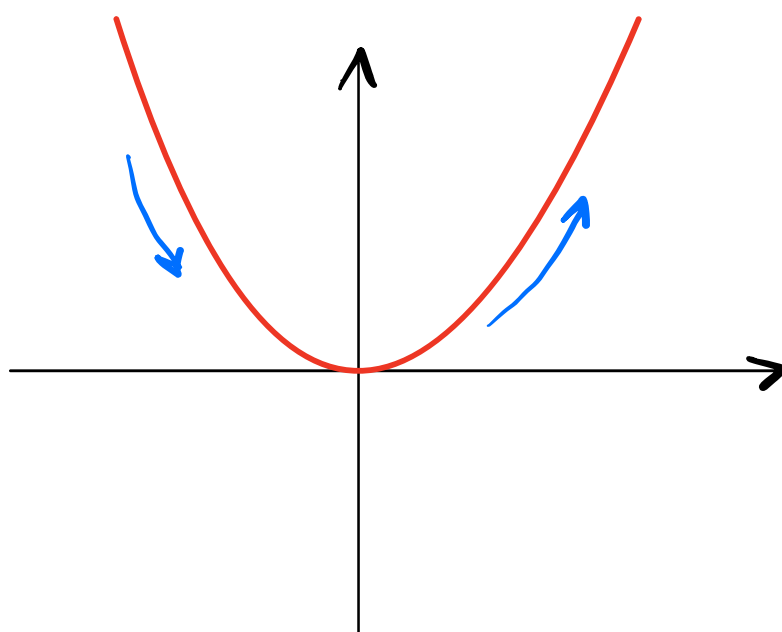


- se $f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1 < x_2$ em I , então f é estritamente decrescente (alguns chamam este caso de decrescente)

OBS: Se $f(x)$ é crescente ou decrescente, dizemos que f é **monótona**.

EXEMPLO

$$f(x) = x^2$$



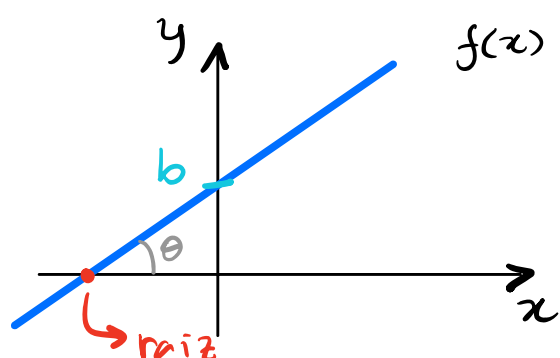
crescente em
 $[0, +\infty)$

decrescente em
 $(-\infty, 0]$

Pré-Cálculo: Funções de 1º, 2º e 3º graus e funções potência

FUNÇÕES ELEMENTARES

- FUNÇÃO AFIM (reta)



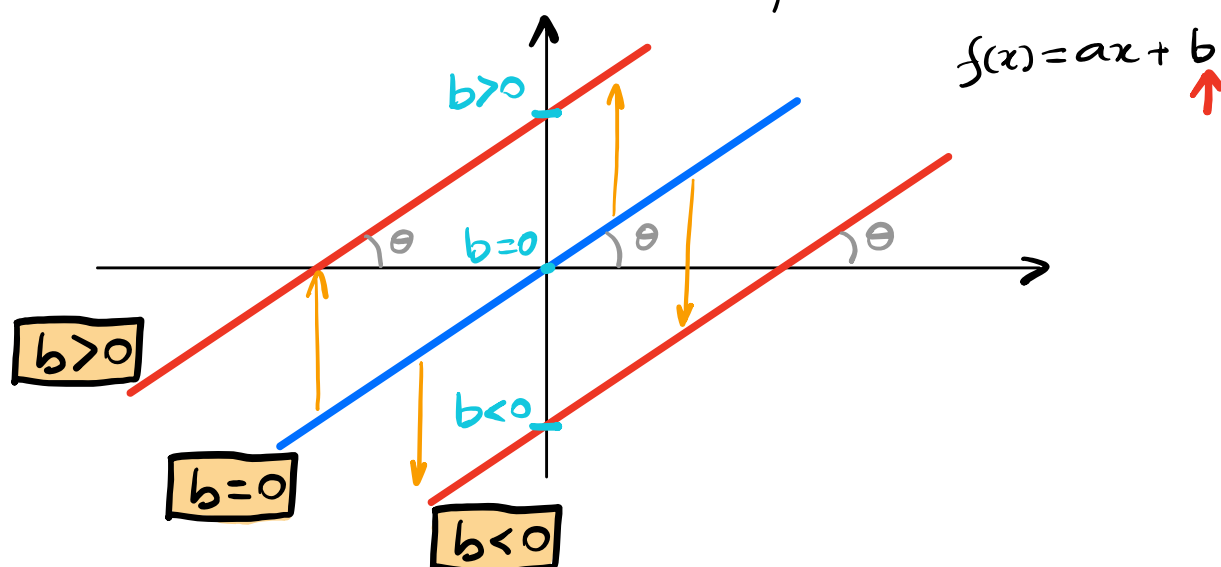
$$f(x) = ax + b$$

$$\tan \theta = a \text{ (inclinação)}$$

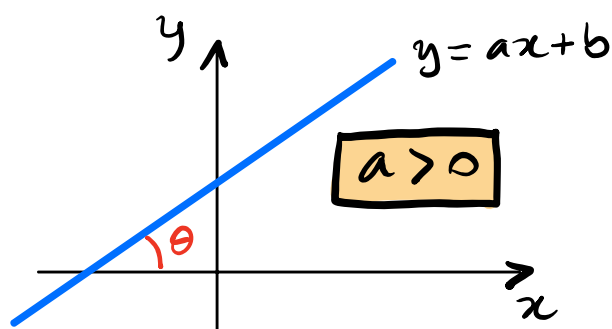
raiz:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

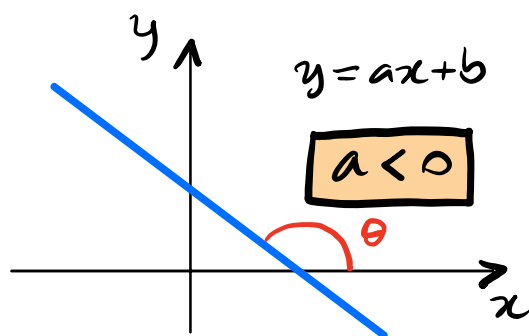
Mudanças em b : translação



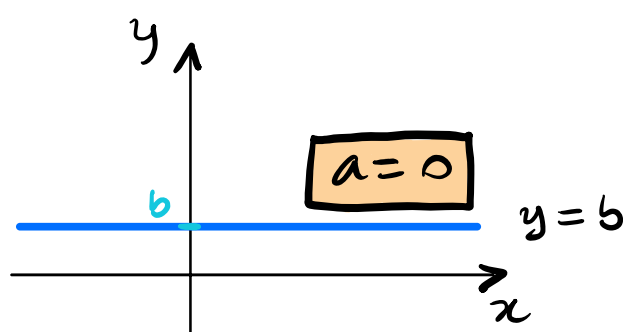
Mudanças em a : inclinação



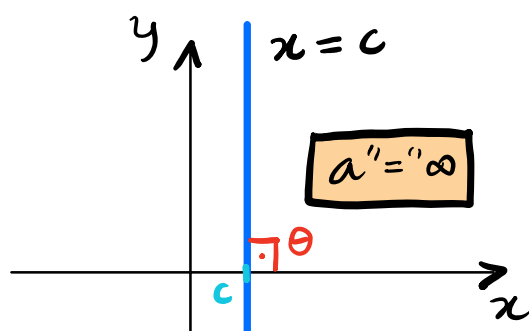
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

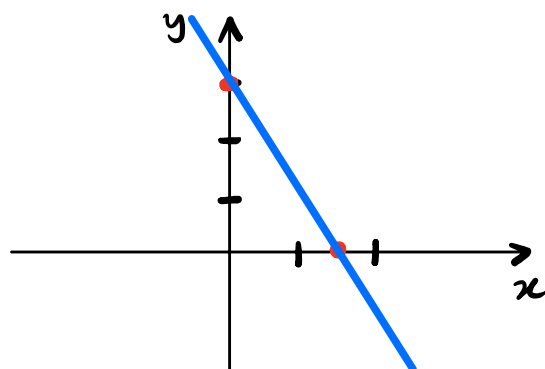


$$\theta = 0$$



$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

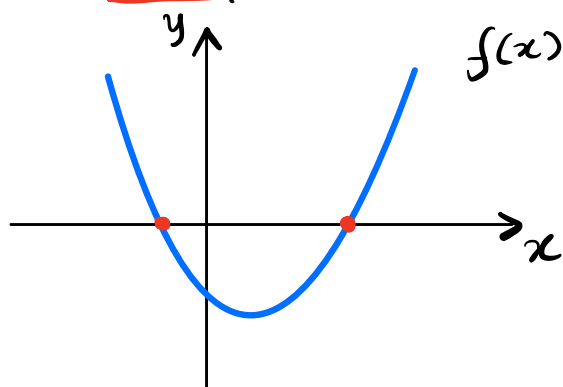
EXEMPLO: Traçar o gráfico de $y = -2x + 3$



Determine 2 pontos:

- $0 = -2x + 3 \Rightarrow x = 3/2$
- $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$

• FUNÇÃO QUADRÁTICA (parábola)



$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

raízes: (fórmula quadrática)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mas de onde vem a fórmula quadrática?

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\ &= 0 \end{aligned}$$

Note que:

$$(x + k)^2 =$$

$$x^2 + 2kx + k^2$$

$$2k = \frac{b}{a} \Rightarrow k = \frac{b}{2a}$$

$$x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$$

$$\Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$\Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $b^2 - 4ac < 0$,
não tem raiz
real



ENCONTRANDO RAÍZES: MÉTODO DA SOMA E DO PRODUTO (RELAÇÕES DE GIRARD)

r_1, r_2 raízes de $p(x) = x^2 + bx + c$.

$$\begin{aligned} \text{Então: } p(x) &= (x - r_1)(x - r_2) \\ &= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(x) = x^2 - Sx + P, \text{ onde}$$

S = soma das raízes

P = produto das raízes

EXEMPLO: Encontrar as raízes de

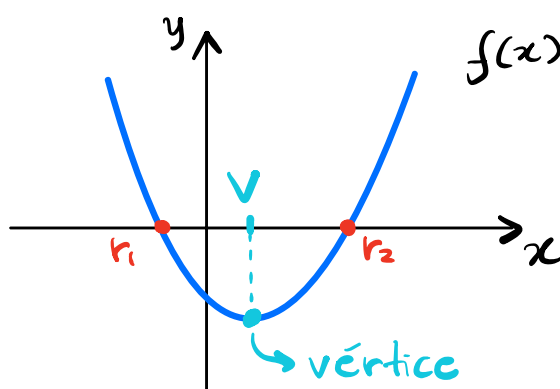
$$p(x) = 3x^2 + 15x + 18$$

$$3x^2 + 15x + 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$S = -5 = -6 + 1 = -2 - 3$$

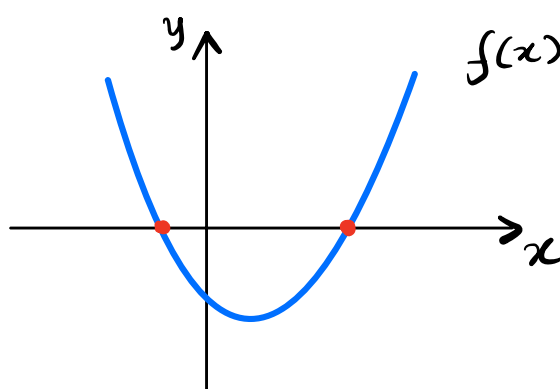
$$P = 6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = (-2) \cdot (-3)$$

Logo, as raízes são -2 e -3 .



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

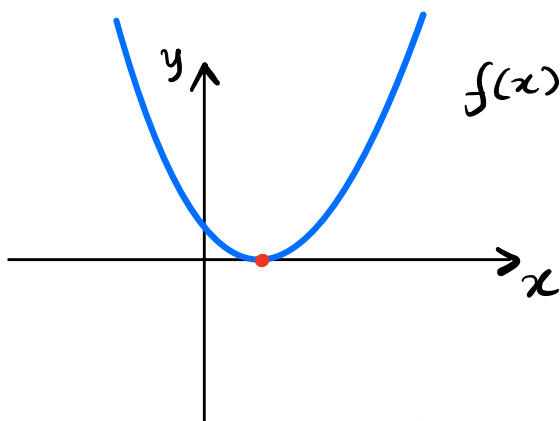
$$V = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\boxed{a > 0} \text{ (concauidade p/ cima)}$$

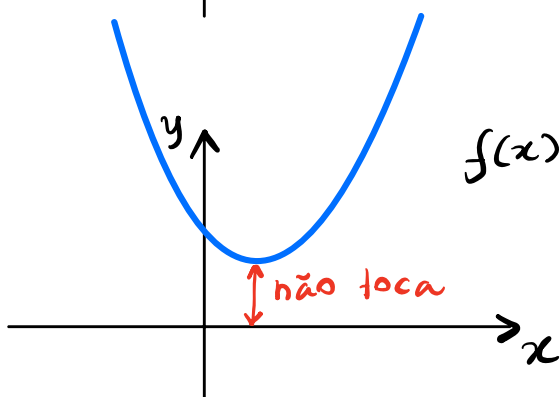
$$\boxed{b^2 - 4ac > 0} \text{ (2 raízes reais)}$$



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\boxed{a > 0} \text{ (concauidade p/ cima)}$$

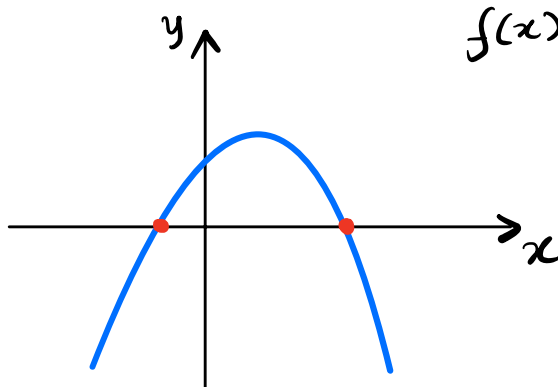
$$\boxed{b^2 - 4ac = 0} \text{ (1 raiz real no vértice)}$$



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\boxed{a > 0} \text{ (concauidade p/ cima)}$$

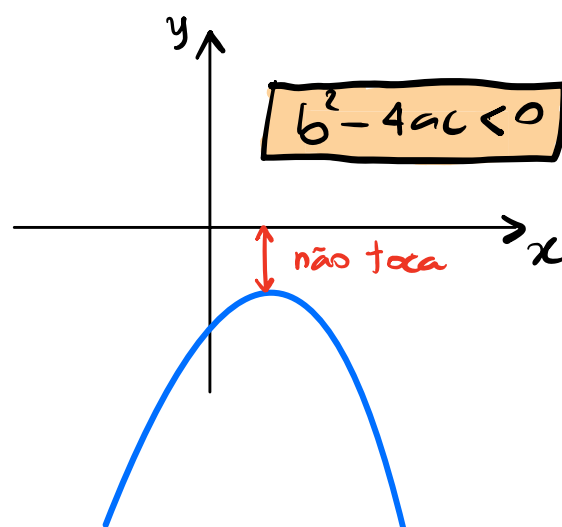
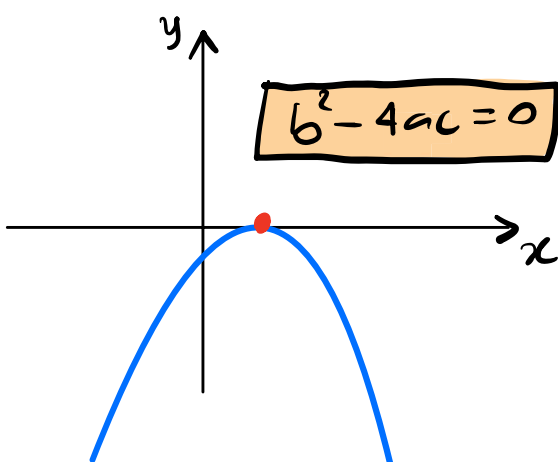
$$\boxed{b^2 - 4ac < 0} \text{ (sem raiz real)}$$



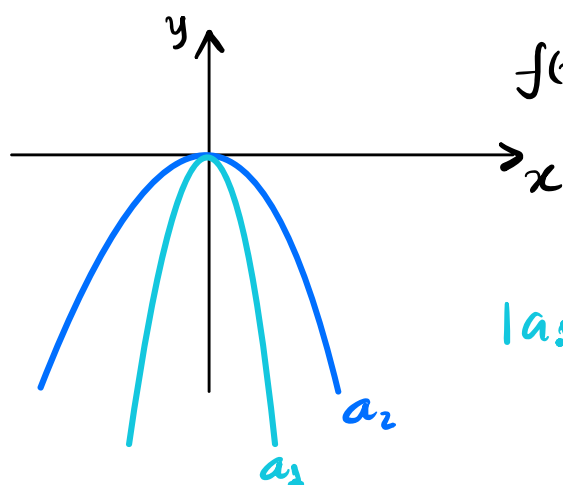
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$a < 0$ (concauidade p/ baixo)

$b^2 - 4ac$ continua a determinar o nº de raízes reais exatamente como antes

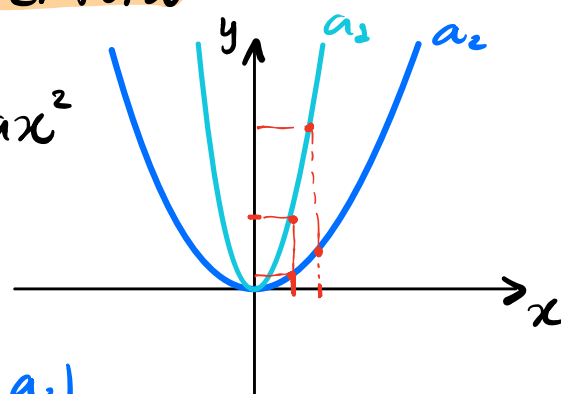


- Mudanças em $|a|$: **abertura**

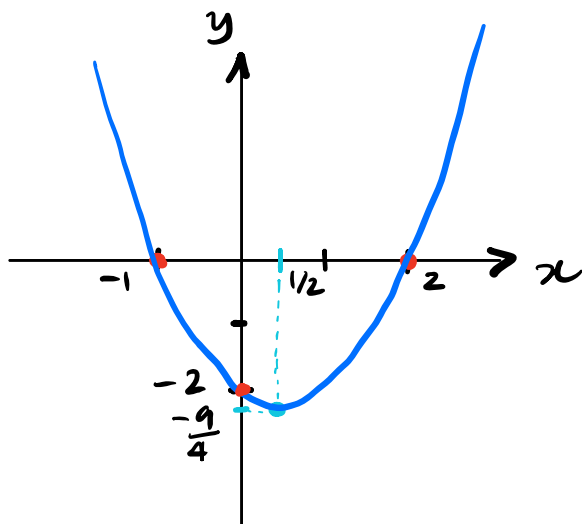


$$f(x) = ax^2$$

$$|a_1| > |a_2|$$



EXEMPLO: Traçar o gráfico de $y = x^2 - x - 2$



1. achar as raízes

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} = -1 \text{ e } 2$$

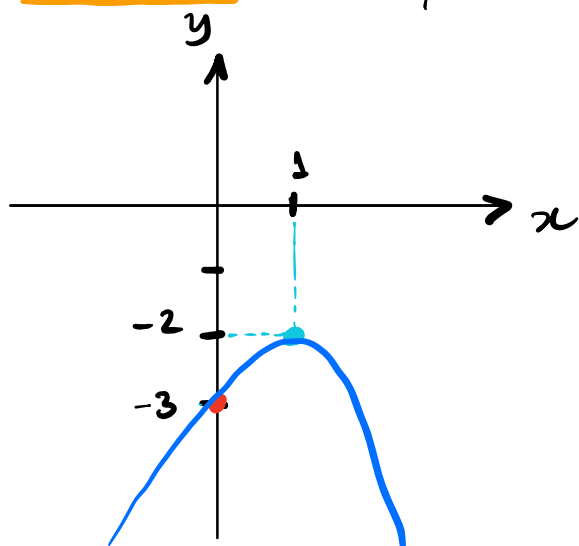
2. vértice $V = \frac{-1+2}{2} = 1/2$

$$f(1/2) = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{9}{4}$$

3. sinal de a : $a > 0$

4. termo c : $c = -2$

EXEMPLO: Traçar o gráfico de $y = -x^2 + 2x - 3$



1. achar as raízes

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}i$$

2. vértice $V = \frac{r_1 + r_2}{2} = 1$

$$f(1) = -1 + 2 - 3 = -2$$

3. sinal de a : $a < 0$

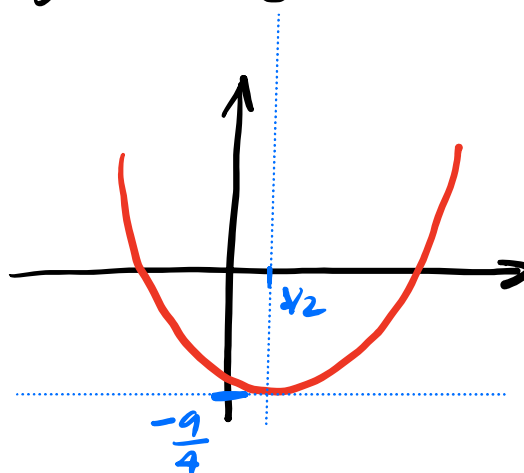
4. termo c : $c = -3$

Outra forma é escrever a parábola completando quadrados:

EXEMPLO: Traçar o gráfico de $y = x^2 - x - 2$

$$\begin{aligned}
 y &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 \\
 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

translação horizontal translação vertical



EXEMPLO: Traçar o gráfico de $y = -2x^2 + 4x - 3$

$$\begin{aligned}
 y &= -2(x^2 - 2x) - 3 \\
 &= -2[(x - 1)^2 - 1] - 3 \\
 &= -2(x - 1)^2 - 1
 \end{aligned}$$

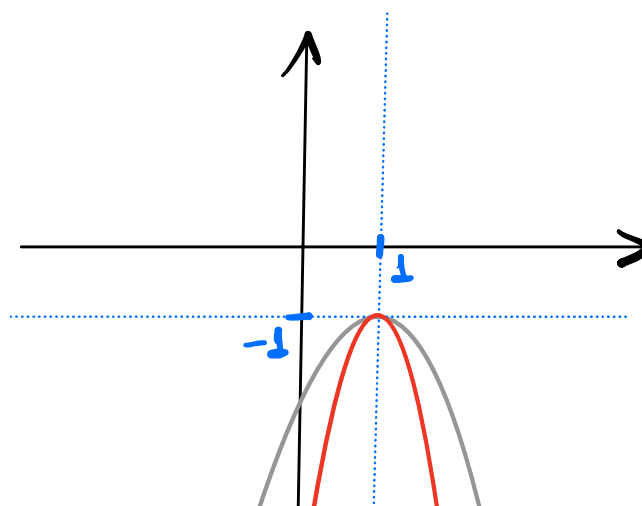
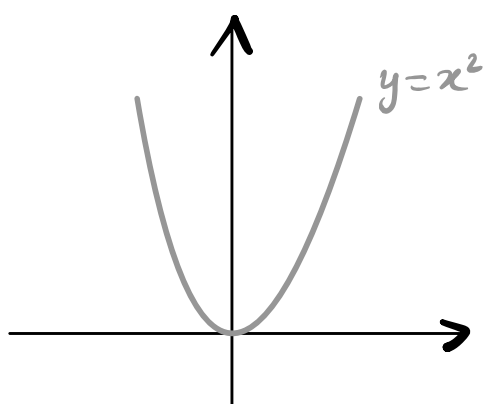


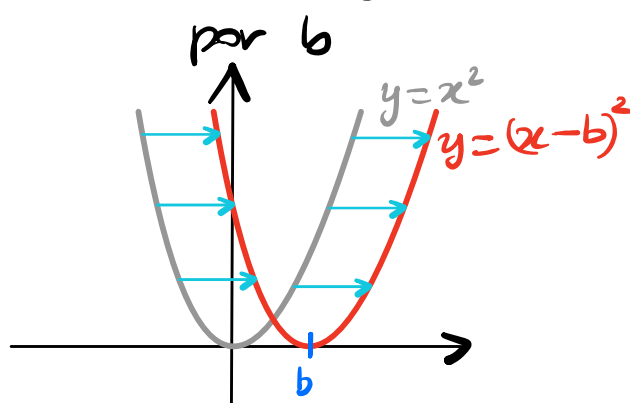
GRÁFICO PELA FORMA REDUZIDA

Se $f(x) = a(x-b)^2 + c$, obtemos seu gráfico a partir de translações, inversões e dilatações de $g(x) = x^2$:

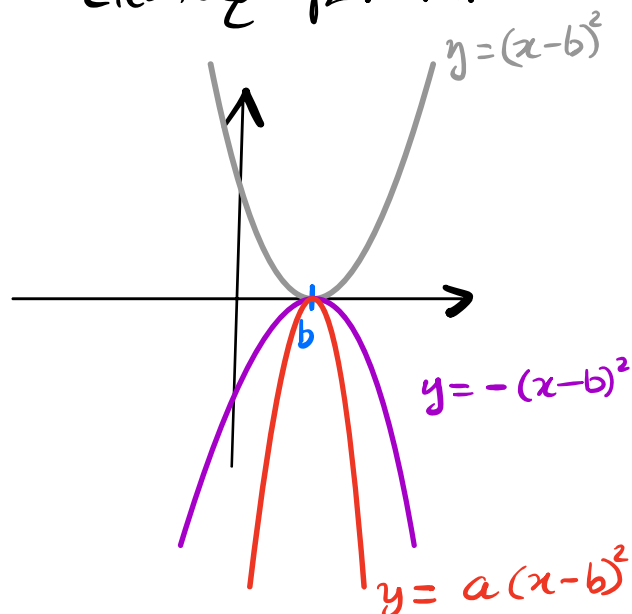
0) Parte de $y = x^2$



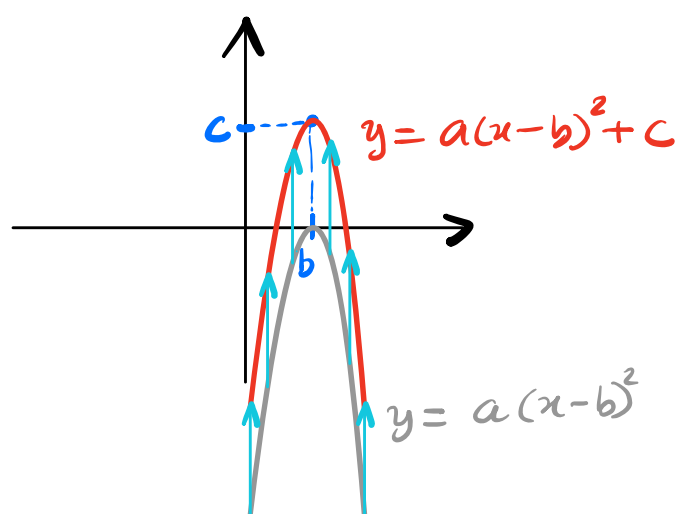
1) Translação horizontal



2) Reflexão (se $a < 0$) e dilatação por $|a|$



3) Translação vertical por c



OBS: Toda quadrática pode ser escrita na forma reduzida:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c$$

$$= \underbrace{a} \left[x - \underbrace{\left(\frac{-b}{2a} \right)} \right]^2 + \underbrace{\left(c - \frac{b^2}{4a} \right)}$$

• FUNÇÃO CÚBICA

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

Existem fórmulas para achar as raízes! Mas elas são complicadas e nunca são exigidas.

O que você deve saber:

$$(-1)^3 = -1 \Rightarrow \text{então } p(x) \text{ troca de sinal}$$

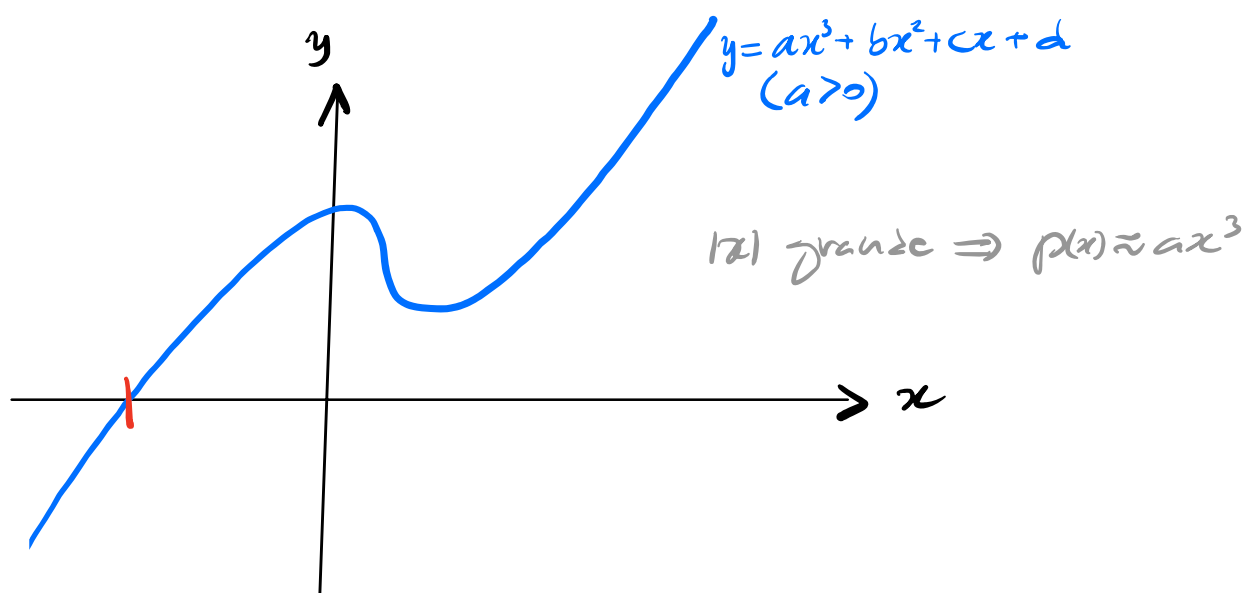
$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$= ax^3 \cdot \left(1 + \frac{bx^2}{ax^3} + \frac{cx}{ax^3} + \frac{d}{ax^3} \right)$$

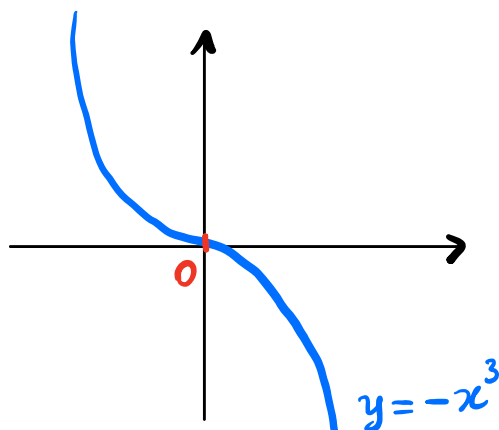
$$= ax^3 \cdot \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3} \right)$$

Se $|x|$ é grande, então $p(x) \approx ax^3$, que tem sinais opostos se $x < 0$ ou $x > 0$.

Logo: $p(x)$ sempre cruza o eixo x (ou seja, tem raiz real)

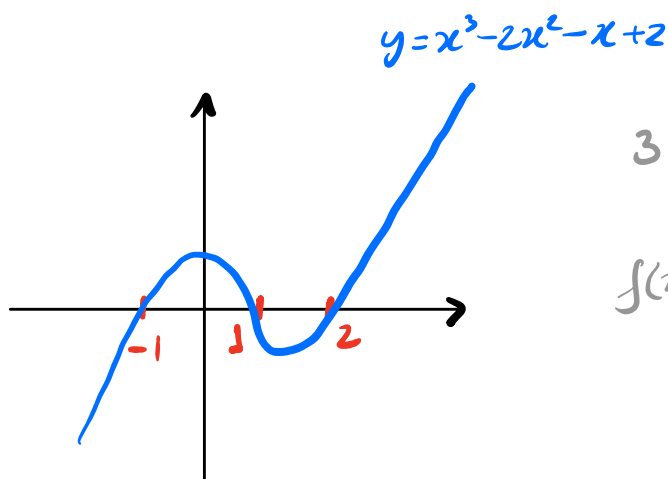


EXEMPLOS :



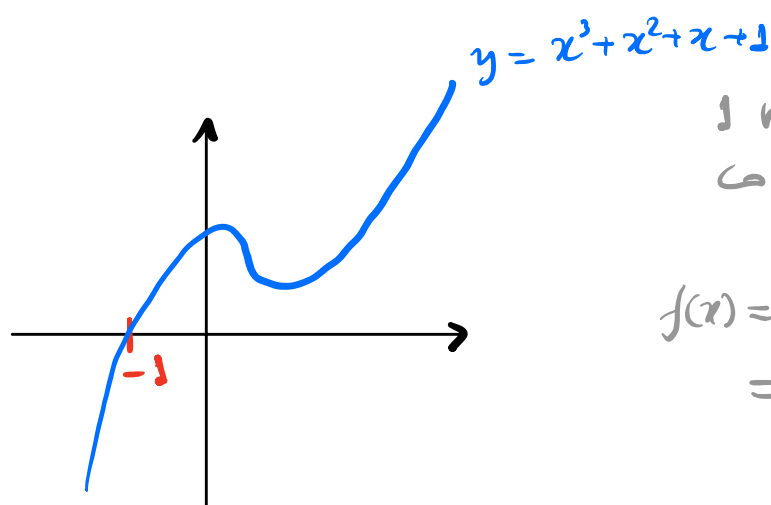
$x=0$ é raiz real tripla:

$$f(x) = -(x - \textcircled{0})^{\textcircled{3}} = -x^3$$



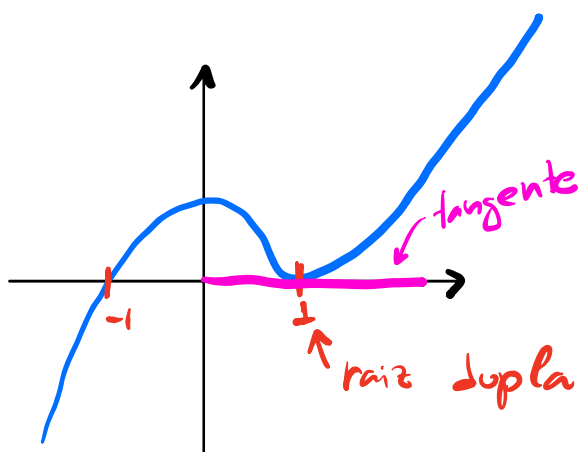
3 raízes reais distintas:

$$f(x) = (x + \underbrace{1}_{-(-1)})(x - 1)(x - 2)$$



1 raiz real, 2 raízes complexas:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 1) \cdot (x^2 + 1) \\ &= (x + 1) \underbrace{(x - i)(x + i)}_{-(-1)} \end{aligned}$$

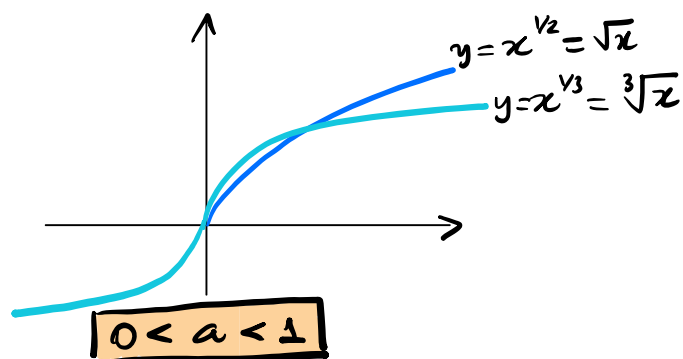
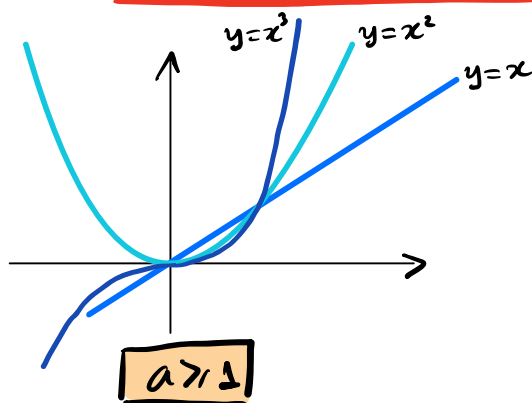


2 raízes reais, sendo uma raiz dupla:

$$f(x) = (x + \underbrace{1}_{-(-1)}) (x - \underbrace{1}_{-(-1)})^2$$

• FUNÇÃO POTÊNCIA

$$f(x) = x^a$$



Para $y = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$,
 $y = \sqrt[n]{x}$

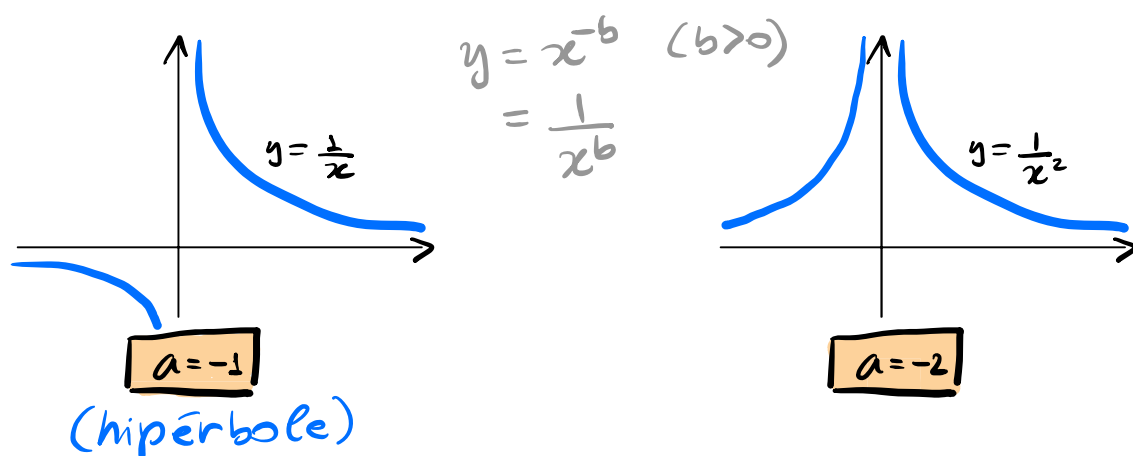
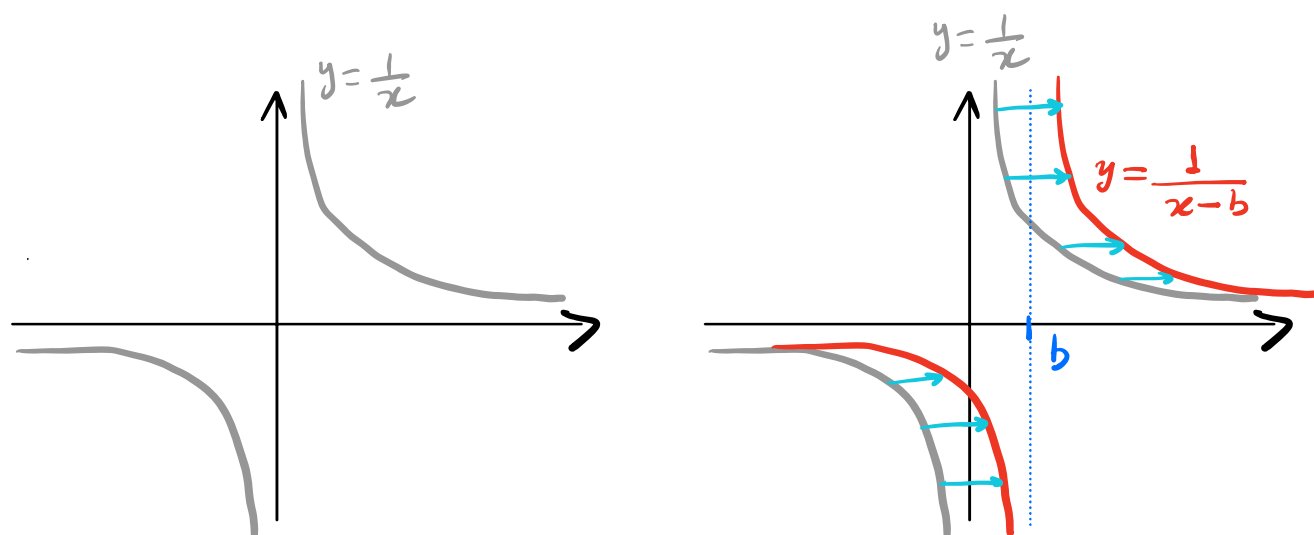
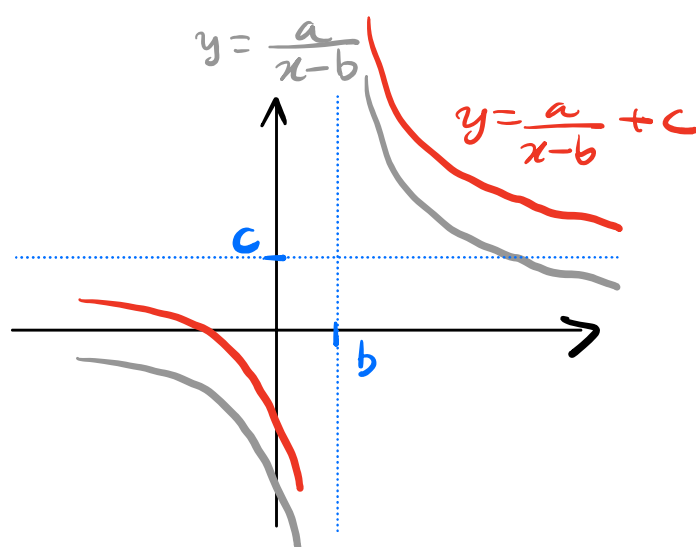
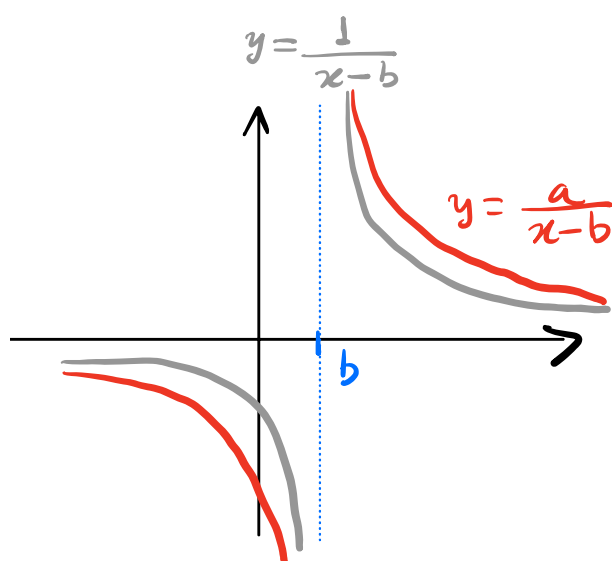


Gráfico da hipérbole

$$y = \frac{a}{x-b} + c$$



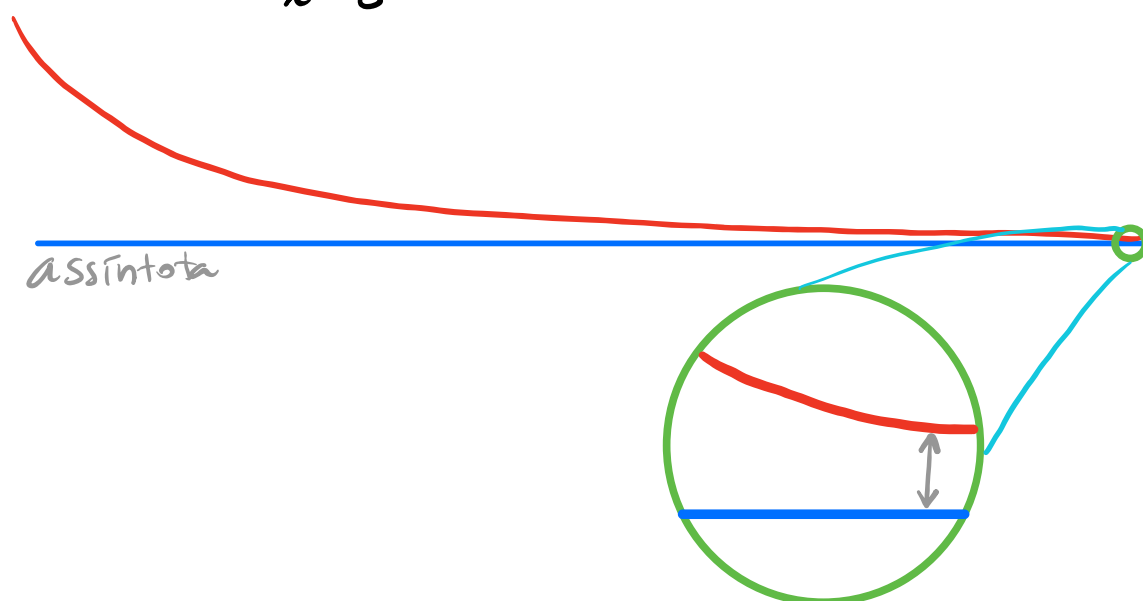


$y = c$ e $x = b$ são
assíntotas da hipérbole:

$$x \rightarrow \pm \infty, \quad \frac{a}{x-b} + c \rightarrow c$$

$$x \rightarrow b_+, \quad \frac{a}{x-b} + c \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow b_-, \quad \frac{a}{x-b} + c \rightarrow -\infty$$



Pré-Cálculo: Polinômios

• POLINÔMIOS

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- Soma de potências (incluem funções afins e quadráticas)

- Grau do polinômio: $p(x) = \underbrace{a_n x^n}_{\neq 0} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$
grau $p = n$ se n for o maior possível tal que $a_n \neq 0$.

SOMA DE POLINÔMIOS

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x)$$

$$= (a_n + b_n) x^n + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

EXEMPLO

$$p(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$q(x) = x^2 + 3x - 1$$

$$(p + q)(x) = x^2 + x^2 + 5x + 2$$

PRODUTO DE POLINÔMIOS

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$$

$$(p \cdot q)(x) = p(x) \cdot q(x)$$

$$= (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) \cdot (b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0)$$

$$= a_n b_k x^{n+k} + \dots + a_n b_1 x^{n+1} + \dots + a_0 b_0$$

Escrevendo

$$p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad q(x) = \sum_{e=0}^k b_e x^e$$

temos

$$p(x) q(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \sum_{e=0}^k b_e x^e$$

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{e=0}^k a_j b_e x^{\underbrace{j+e}_{p-j}}$$

$$= \sum_{p=0}^{n+k} \sum_{j=0}^p a_j b_{p-j} x^p$$

EXEMPLO : $p(x) = x^2 - a, \quad q(x) = x^2 + a$

$$\begin{aligned}
 p(x)q(x) &= (x^2 - a)(x^2 + a) \\
 &= x^4 + \cancel{ax^2} - \cancel{ax^2} - a^2 \\
 &= x^4 - a^2.
 \end{aligned}$$

- DIVISÃO DE POLINÔMIOS

$$\frac{7}{3} \Rightarrow 7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$\begin{array}{r} 7' \overline{) 3} \\ \underline{1} \end{array}$$

De um modo geral:

$$a = d \cdot b + r, \text{ onde } 0 \leq r < b$$

- Ideia parecida com polinômios:

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x), \quad \text{grau } r < \text{grau } q$$

EXEMPLO: Dividir $p(x) = x^4 - 2x + 1$ por $q(x) = x^2 - 3x - 2$

$$\begin{array}{r}
 \cancel{x^4} - 2x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 3x - 2 \\ \hline x^2 + 3x + 11 \end{array} \right. \\
 \underline{-\cancel{x^4} + 3x^3 + 2x^2} \\
 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{-3x^3 + 9x^2 + 6x} \\
 11x^2 - 4x + 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11x^2 + 4x + 1 \\
 -11x^2 + 33x + 22 \\
 \hline
 37x + 23
 \end{array}$$

$$\underbrace{x^4 - 2x + 1}_p = \underbrace{(x^2 + 3x + 11)}_d \cdot \underbrace{(x^2 - 3x - 2)}_q + \underbrace{37x + 23}_r$$

EXEMPLO: Dividir $\underbrace{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}_{p(x)}$ por $x - 1$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \quad | \quad x - 1 \\
 \hline
 -x^3 + x^2 \\
 \hline
 3x^2 - 4x + 1 \\
 -3x^2 + 3x \\
 \hline
 -x + 1 \\
 x - 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$p(x) = (x^2 + 3x - 1)(x - 1)$$

Logo, 1 é raiz de $p(x)$

Vale a recíproca: Se a é raiz de $p(x)$, então $(x - a)$ divide $p(x)$

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA



Gauss, 1777 - 1855

Todo polinômio tem raiz (que pode ser complexa)

LOGO: $p(x) = a \cdot (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$,
onde $r_1, r_2, \dots, r_n$ são raízes de $p(x)$.
(fatoração de $p(x)$)

- Pode acontecer de algumas raízes serem complexas.

Mas: se $z = a + bi$ é raiz de um polinômio $p(x)$ de coeficientes reais, então $\bar{z} = a - bi$ também é raiz de $p(x)$.

EXEMPLO: $p(x) = x^2 - 2x + 2$

$$\text{raízes: } x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Mais geral: $p(z) = 0 \Rightarrow p(\bar{z}) = 0$ se p tem coeficientes reais:

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \in \mathbb{R} \quad \forall k$$

z raiz, $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
 p(z) &= 0 \\
 0 &= \overline{p(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \\
 &= \overline{a_n z^n} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
 &= \overline{a_n} (\overline{z})^n + \dots + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0} \\
 &= a_n (\overline{z})^n + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = p(\overline{z})
 \end{aligned}$$

Logo, todo polinômio real pode ser fatorado na forma

$$p(x) = a(x-r_1) \cdots (x-r_k) \cdot \overbrace{(x^2+b_1x+c_1) \cdots (x^2+b_lx+c_l)}^{\text{onde todos os coeficientes são reais.}},$$

Os termos quadráticos vêm das raízes complexas:

$$z \text{ raiz} \Rightarrow \overline{z} \text{ raiz.}$$

$$z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$$

$(x-z)(x-\overline{z})$ divide $p(x)$. Mas:

$$\begin{aligned}
 (x-z)(x-\overline{z}) &= ((x-a)-bi)((x-a)+bi) \\
 &= (x-a)^2 + b^2 \\
 &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2,
 \end{aligned}$$

que tem coeficientes em $\mathbb{R}$.

OBS: Pode ter raízes duplas, triplas etc.

Se r é raiz de p com multiplicidade m , então

$$p(x) = (x - r)^m q(x),$$

onde $q(r) \neq 0$.

EXEMPLO: Fatorar $p(x) = x^2 - 2x + 1$

Raízes: $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1 \Rightarrow x - 1$ divide p .

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 1 & x - 1 \\ -x^2 + x & x - 1 \\ \hline -x + 1 & \\ x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$p(x) = (x - 1)^2$
1 é raiz dupla

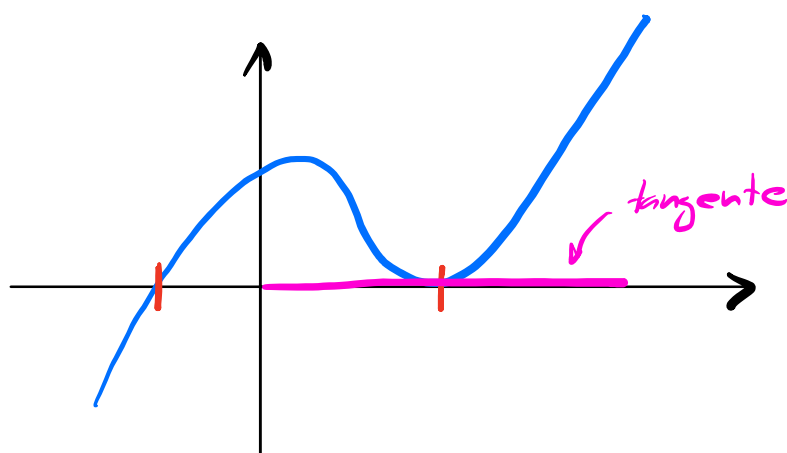
EXEMPLO: Se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem coeficientes reais e tem exatamente duas raízes reais distintas, então uma delas tem multiplicidade 2.

Se $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ for raiz de $p(x)$, então como $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tem coeficientes reais,

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{p(z)} = \overline{az^3 + bz^2 + cz + d} \\ &= \overline{az^3} + \overline{bz^2} + \overline{cz} + \overline{d} \\ &= \bar{a} \cdot (\bar{z})^3 + \bar{b} (\bar{z})^2 + \bar{c} \bar{z} + \bar{d} \\ &= a(\bar{z})^3 + b(\bar{z})^2 + c(\bar{z}) + d \\ &= p(\bar{z}) \end{aligned}$$

Como $z \in \mathbb{R}$, $z \neq \bar{z}$, daí p teria 4 raízes distintas, uma contradição.

Então $p(x) = a(x - r_1)(x - r_2)^2$.



PESQUISA DE RAÍZES RACIONAIS

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$$

Suponha que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é raiz de f , onde $\text{mdc}(p, q) = 1$.

$$\Rightarrow a_n \frac{p^n}{q^n} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad (\times q^n)$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow a_n p^n = q \cdot (-a_{n-1} p^{n-1} - \dots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1})$$

Logo, $q \mid a_n p^n$. Como $\text{mdc}(p, q) = 1$,
 $q \mid a_n$.

$$a_0 q^n = p \cdot (-a_{n-1} p^{n-1} - \dots - a_1 q^{n-1})$$

$$\Rightarrow p \mid a_0 q^n \Rightarrow p \mid a_0 \text{ pois } \text{mdc}(p, q) = 1.$$

OU SEJA:

Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ tem coeficientes inteiros e raiz racional

$r = \frac{p}{q}$, onde $\text{mdc}(p, q) = 1$, então p divide a_0 e q divide a_n .

EXEMPLO: Encontrar as raízes de

$$p(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$

$$\quad \quad \quad -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \quad -\frac{2}{4} - \frac{8}{4}$$

Se tiver raiz $r = \frac{p}{q}$, então p divide 2 e q divide 2.

$$q = 1 \text{ ou } 2, \quad p = \pm 1, \pm 2$$

$$\text{Candidatos: } r = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$$

$$p(1) = 6 \quad p(2) \neq 0 \quad p(\frac{1}{2}) = 0$$

$$p(-1) = 0 \quad p(-2) = 0 \quad p(-\frac{1}{2}) = -3/2$$

$$\text{Raízes: } -2, -1 \text{ e } \frac{1}{2}$$

Pré-Cálculo: Funções Racionais e Algébricas

• FUNÇÕES RACIONAIS

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

domínio: $q(x) \neq 0$

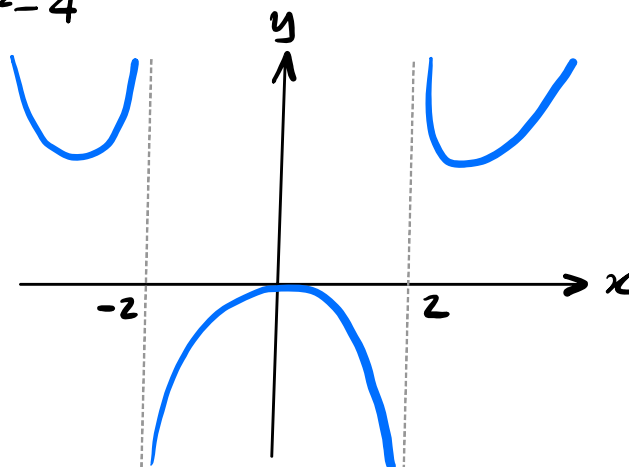
EXEMPLO:

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

$$\text{Domínio: } x^2 - 4 \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq \pm 2$$

$$\text{Domínio} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$



Dividindo:

$$\begin{array}{r} 2x^4 - x^2 + 1 \quad | \quad x^2 - 4 \\ \underline{-2x^4 + 8x^2} \\ 7x^2 + 1 \\ \underline{-7x^2 + 28} \\ 29 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(2x^2 + 7)(x^2 - 4) + 29}{(x^2 - 4)}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + 7 + \frac{29}{x^2 - 4}$$

Logo, podemos usar o algoritmo de divisão para escrever $\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{b(x)}{q(x)}$, com grau $b <$ grau q :

POIS: $p(x) = a(x)q(x) + b(x)$, $\text{grau } b < \text{grau } q$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a(x)q(x) + b(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{b(x)}{q(x)}$$

No caso do exemplo, como $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, temos

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow \frac{Ax + 2A + Bx - 2B}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x^2-4}$$

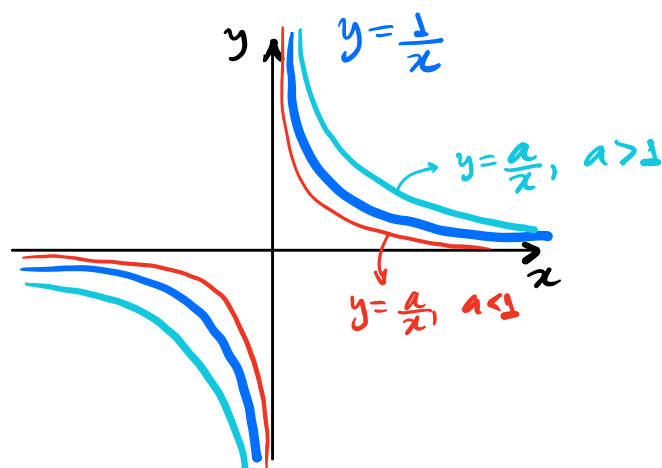
$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$$

Assim, $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2}$

Daí,

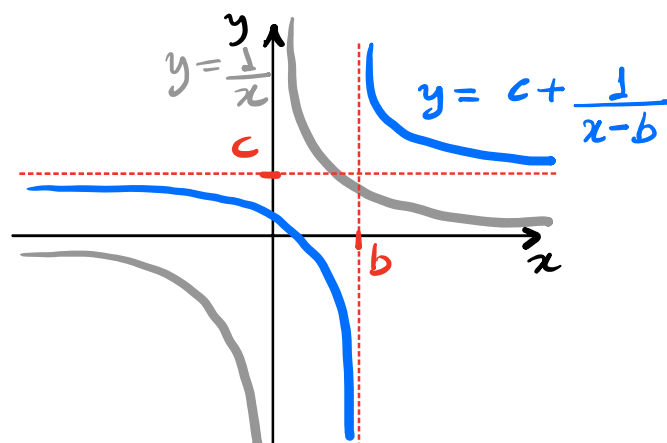
$$f(x) = 2x^2 + 7 + \frac{29}{4x-8} - \frac{29}{4x+8}$$

OBS: Vamos explorar ainda mais essa ideia quando falarmos mais à frente de integrais de funções racionais.

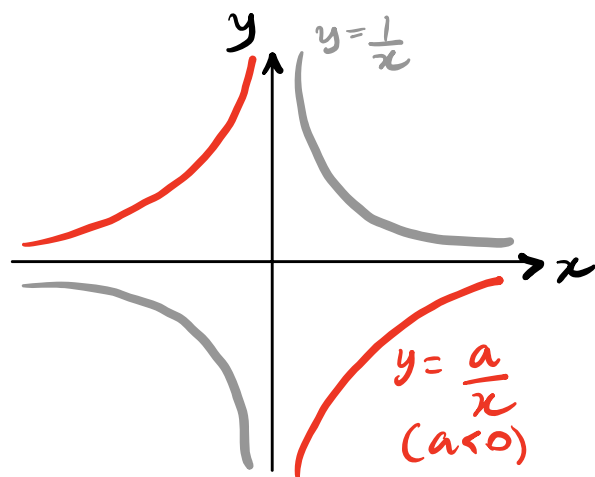
EXEMPLO (Hipérbole)

- os eixos são assíntotas de $y = \frac{1}{x}$
- parâmetro a dilata ($a > 1$) ou contrai ($0 < a < 1$) a hipérbole $y = \frac{a}{x}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



- b e c deslocam as assíntotas



- se $a < 0$, a hipérbole sofre reflexão vertical

- FUNÇÕES ALGÉBRICAS

Expressões envolvendo as operações algébricas: soma, subtração, produto, divisão e extração de raízes.

EXEMPLOS

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}, \quad g(x) = \frac{x^2-3}{\sqrt[3]{x}+x}$$

$$h(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Pré-Cálculo: Exponencial e Logaritmo

EXPONENCIAL E LOGARITMO

• EXPONENCIAL

$$a \in \mathbb{R}, a > 0 \quad (a \neq 1)$$

Exponencial de base a :

$$f_a: x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$$

PROPRIEDADES:

$$(i) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(ii) \quad a^0 = 1$$

$$\cancel{a} = a^{1+0} = \cancel{a}^1 \cdot a^0 = \cancel{a}^{\neq 0} \cdot a^0 \Rightarrow a^0 = 1$$

$$(iii) a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$1) a^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se $a^{x_0} = 0$, então

$$a = a^{(1-x_0)+x_0} = a^{1-x_0} \cdot a^{x_0} = 0, \text{ absurdo}$$

$$2) a^x = a^{\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)} = \left(a^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(iv) (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(v) \text{ Se } a > 1, \text{ então } x < y \Rightarrow a^x < a^y$$

Basta ver que $a^x > 1$ se $x > 0$.

$$\text{Se } x = n \in \mathbb{N}, \quad a > 1 \Rightarrow a^2 > a > 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow a^n > a^{n-1} > \dots > a > 1.$$

$$\text{Se } x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N} :$$

$$1) a^{1/q} > 1, \text{ senão}$$

$$a^{1/q} \leq 1 \Rightarrow a^{2/q} \leq a^{1/q} \leq 1 \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow a = (a^{1/q})^q \leq (a^{1/q})^{q-1} \leq \dots \leq a^{1/q} \leq 1,$$

absurdo pois $a > 1$.

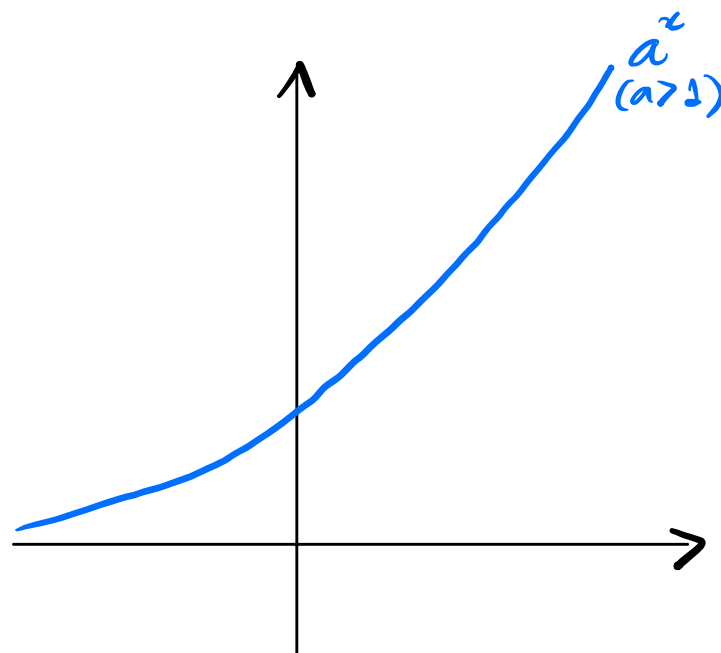
$$2) a^{p/q} = (a^{1/q})^p > 1$$

$$\text{Logo, } a^x > 1 \quad \forall x > 0$$

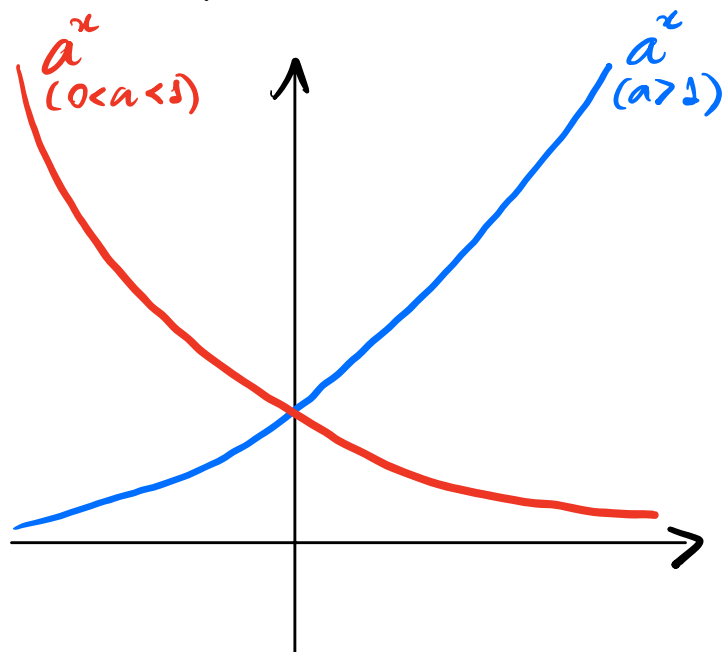
$$\text{Dai, se } x > y \Rightarrow x - y > 0$$

$$a^x = a^{(x-y)+y} = a^{x-y} \cdot a^y > 1 \cdot a^y = a^y$$

Ou seja: a^x é crescente se $a > 1$



(vi) Se $0 < a < 1$, então $x < y \Rightarrow a^y < a^x$



Se $0 < a < 1$, então
 $a = \frac{1}{b}$, com $b > 1$.

$$\Rightarrow a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$$

(a^x é reflexão horizontal de b^x , onde $b = a^{-1}$)

Ou seja, a^x é decrecente se $0 < a < 1$

RESOLVENDO EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

$$a^{f(x)} = b$$

- Método da base comum

1) Achar α tal que $b = a^\alpha$

$$2) a^{f(x)} = a^\alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$$

EXEMPLO: Resolver $3^{x+1} = 9$

$$9 = 3^2 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^2 \Leftrightarrow x+1 = 2 \\ \Leftrightarrow x = 1$$

EXEMPLO: Resolver $4^{x^2-3x} = 256$
(x-4)(x+1)

$$256 = 2^8 = 2^{2 \cdot 4} = 4^4$$

$$\Rightarrow 4^{x^2-3x} = 4^4 \Rightarrow x^2-3x=4 \Rightarrow x^2-3x-4=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = r_1 + r_2 = 3 \\ P = r_1 \cdot r_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -1$$

EXEMPLO: Resolver $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^2 \cdot 3^x + 81 = (3^x)^2 - 18 \cdot (3^x) + 81 = 0$$

Seja $y = 3^x$. Então:

$$y^2 - 18y + 81 = 0$$

$$\begin{cases} S = 18 = 9 + 9 \\ P = 81 = 9^2 \end{cases} \Rightarrow y = 9 = 3^2 = 3^x \Rightarrow x = 2.$$

• LOGARITMO

Como, $\forall a > 0, a \neq 1$, a exponencial $a^x: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ é monótona, ela possui uma inversa

$$\log_a: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log_a x$$

Assim, como $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$, temos

$$\log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente a que devemos elevar a base a para obter x .

EXEMPLOS

• $\log_2 8 = 3$ pois $2^3 = 8$

- $\log_5 5 = 1$ pois $5^1 = 5$
- $\log_\pi 1 = 0$ pois $\pi^0 = 1$
- $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$ pois $(\sqrt{3})^2 = 3$

PROPRIEDADES :

$$(i) \log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0$$

$$(iii) \log_a 1 = 0 \quad (a^0 = 1)$$

$$(iv) \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$u = \log_a x \Rightarrow a^u = x$$

$$v = \log_a y \Rightarrow a^v = y$$

Dai,

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$$

$$\Rightarrow \log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$$

Essa propriedade motivou a criação do logaritmo e seu uso para calcular:

x, y números grandes

1) Consulta $\alpha = \log_a x$, $\beta = \log_a y$

2) Calcula $\alpha + \beta$

3) Consulta u tal que $\log_a u = \alpha + \beta$

$u = xy$ pois

$$\underbrace{\log_a x}_{\alpha} + \underbrace{\log_a y}_{\beta} = \underbrace{\log_a xy}_{\alpha + \beta}$$

$$(v) \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$u = \log_a x \Rightarrow a^u = x$$

$$v = \log_a y \Rightarrow a^v = y$$

Daí,

$$a^{u-v} = a^u \cdot a^{-v} = \frac{a^u}{a^v} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y} \right)$$

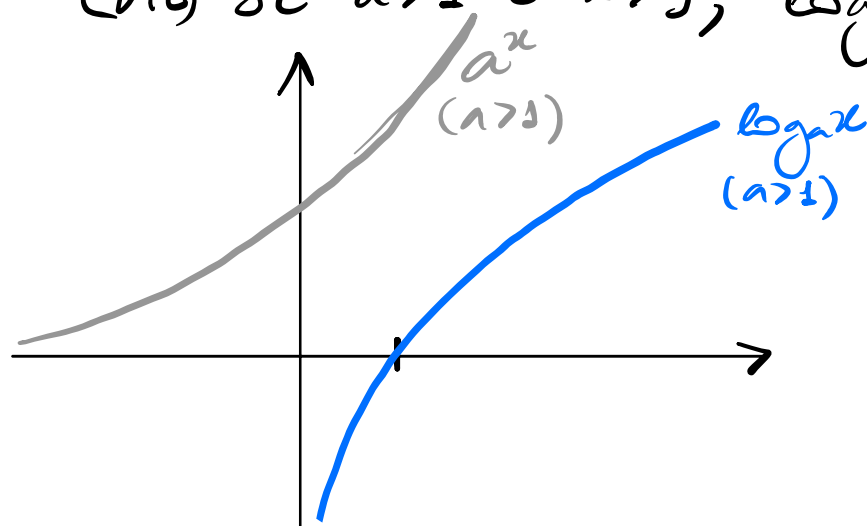
$$(vi) \log_a (x^y) = y \log_a x \quad \forall x > 0, y \in \mathbb{R}$$

$$u = \log_a x \Rightarrow a^u = x$$

$$a^{yu} = (a^u)^y = x^y$$

$$\Rightarrow \log_a x^y = yu = y \log_a x$$

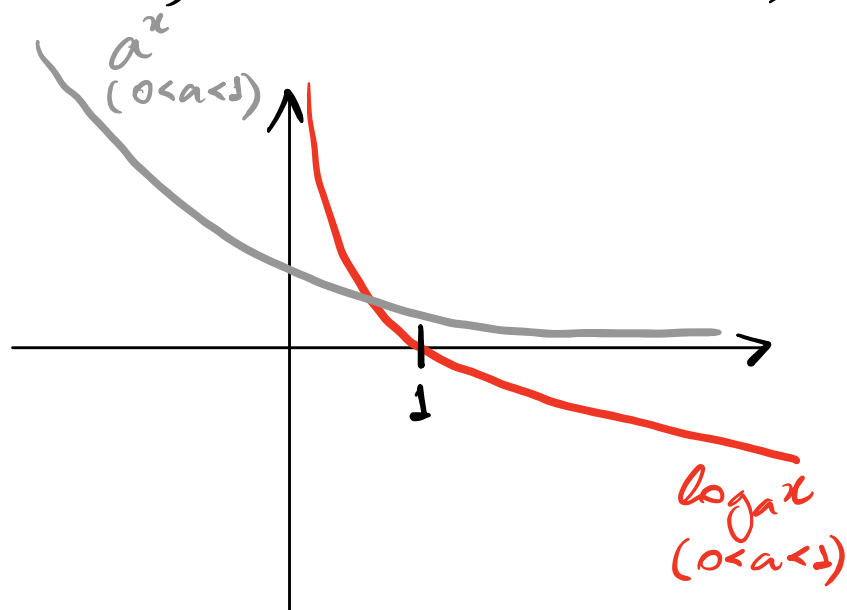
$$(vii) \text{ se } a > 1 \text{ e } x > y, \log_a x > \log_a y$$



$\log_a x$ é
inversa de a^x ,
que é crescente
para $a > 1$

Ou seja, $\log_a x$ é crescente se $a > 1$

(viii) se $0 < a < 1$ e $x > y$, $\log_a x < \log_a y$



$\log_a x$ é
inversa de a^x ,
que é decrescente
para $0 < a < 1$

Ou seja, $\log_a x$ é decrescente se $0 < a < 1$

TROCA DE BASE:

- Existe relação entre $\log_a x$ e $\log_b x$?

$$u = \log_b x \Rightarrow b^u = x$$

$$v = \log_a b \Rightarrow a^v = b$$

Então

$$x = b^u = (a^v)^u = a^{u \cdot v}$$

$$\Rightarrow \log_a x = u \cdot v = \log_b x \cdot \log_a b$$

Vale então a fórmula de mudança de base:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

! IMPORTANT !

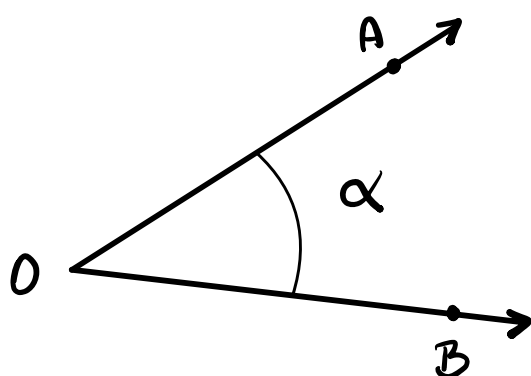
Parte I: Pré-Cálculo

TRIGONOMETRIA

Pré-Cálculo: Ângulos, Geometria, Seno e Cosseno

TRIGONOMETRIA

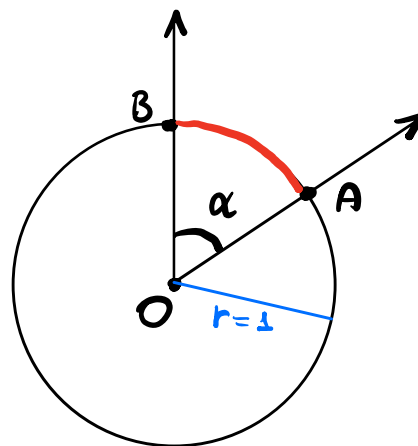
REVISÃO DE ÂNGULOS



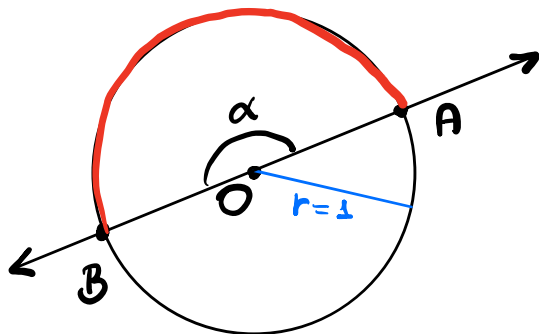
Um ângulo é determinado por duas semirretas de mesma origem

• RADIANO

A medida em radianos do ângulo α é o comprimento do arco $\widehat{AB}$ subtendido pelo ângulo sobre o círculo de raio $r=1$ e centro O igual ao vértice do ângulo

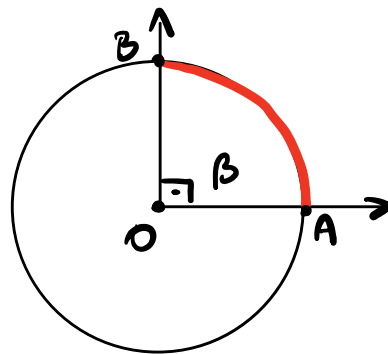


$$\alpha = \widehat{AB} \text{ rad}$$

EXEMPLOS:

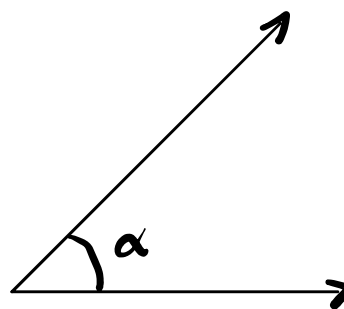
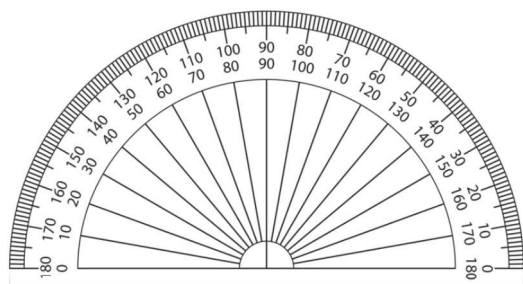
Em radianos, o ângulo raso α mede π (meia circunferência)

Já o ângulo reto, onde $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ são perpendiculares, mede $\frac{\pi}{2}$ ($\frac{1}{4}$ circunferência)

• GRAU

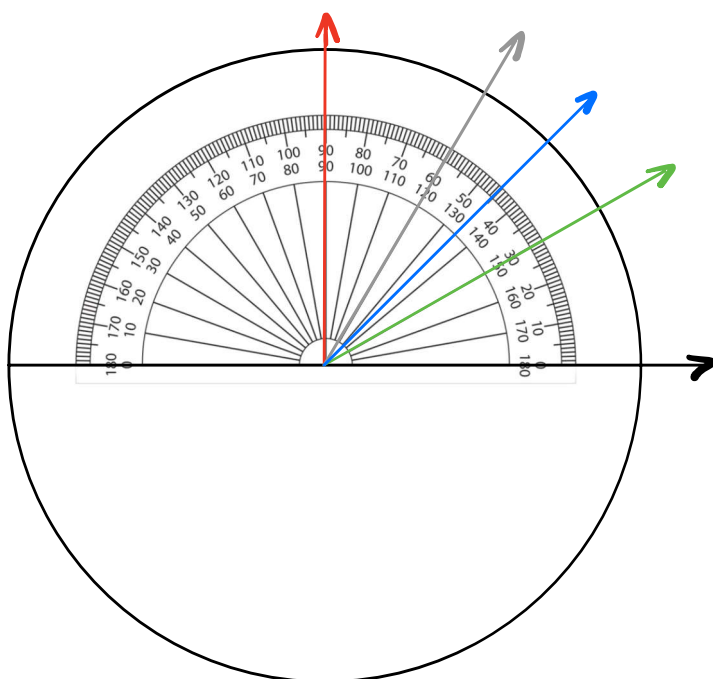
É a forma mais usada no dia a dia para medir ângulos (mas não na matemática, que prefere o radiano).

O grau é baseado na divisão do círculo em 360 partes de igual medida.



$$\alpha = 45^\circ$$

• ÂNGULOS NOTÁVEIS



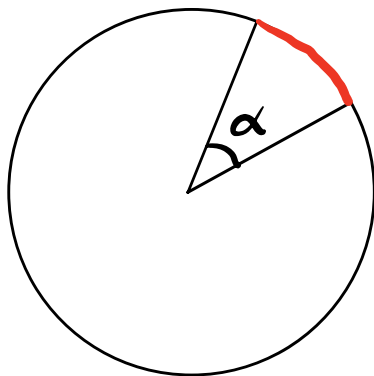
$$90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

- CONVERSÃO GRAUS — RADIANOS

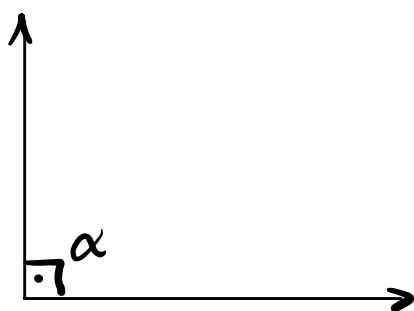


$$\begin{array}{l} 360^\circ \text{ — } 2\pi \\ x^\circ \text{ — } y \text{ rad} \end{array}$$

$$y = 2\pi \cdot \frac{x}{360}$$

$$x = 360 \cdot \frac{y}{2\pi}$$

- CONCEITOS BÁSICOS

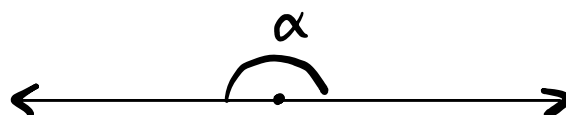


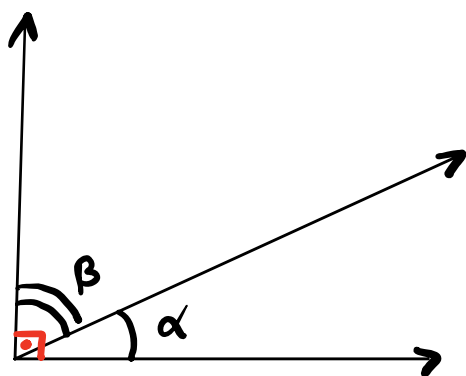
ângulo reto:

$$\alpha = 90^\circ \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

ângulo raso:

$$\alpha = 180^\circ (\pi)$$



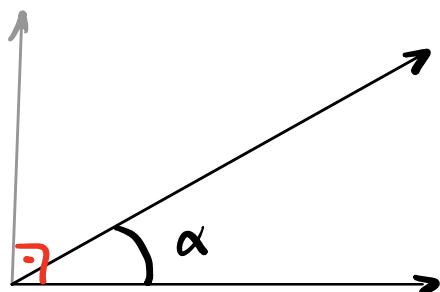
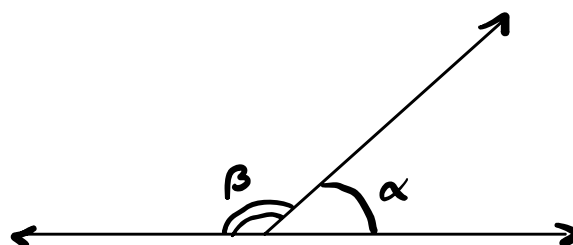


ângulos complementares:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

ângulos suplementares:

$$\alpha + \beta = 180^\circ (\pi)$$

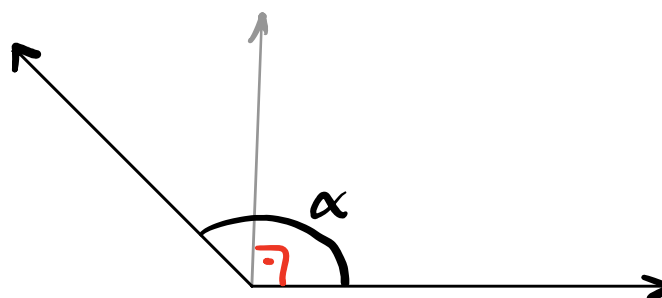


ângulo agudo

$$\alpha < 90^\circ \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

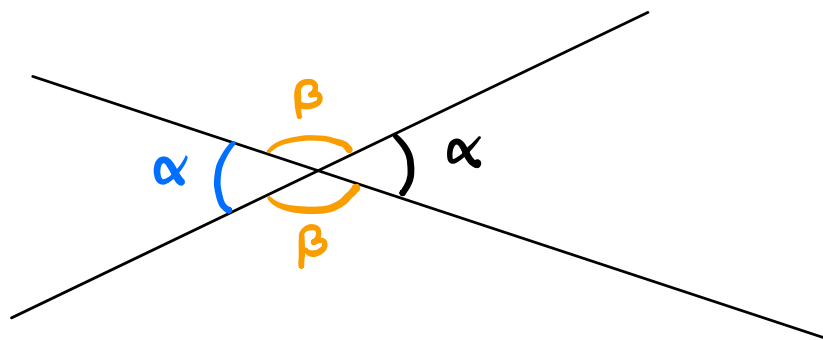
ângulo obtuso

$$\alpha > 90^\circ \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

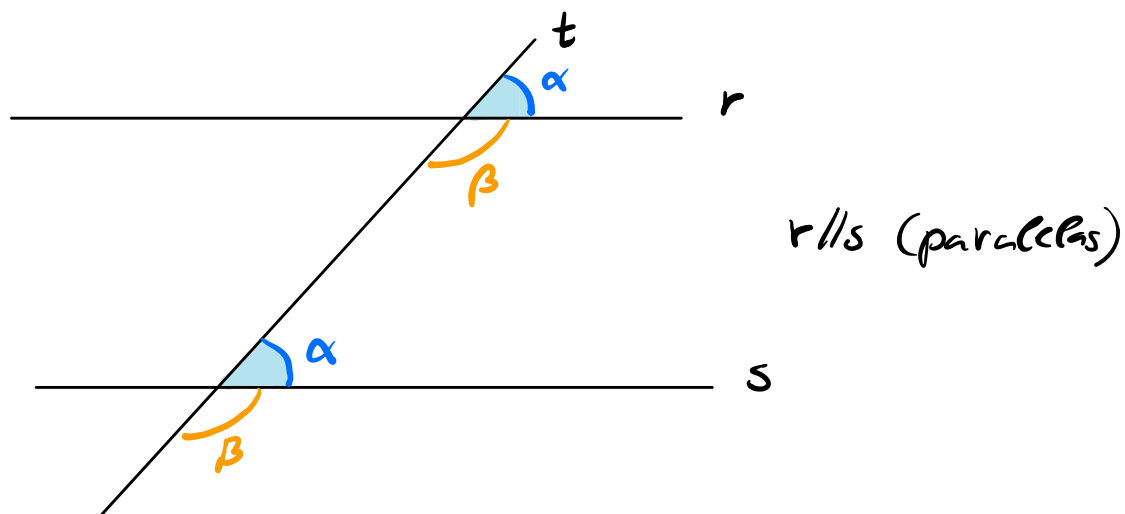


- FATOS BÁSICOS

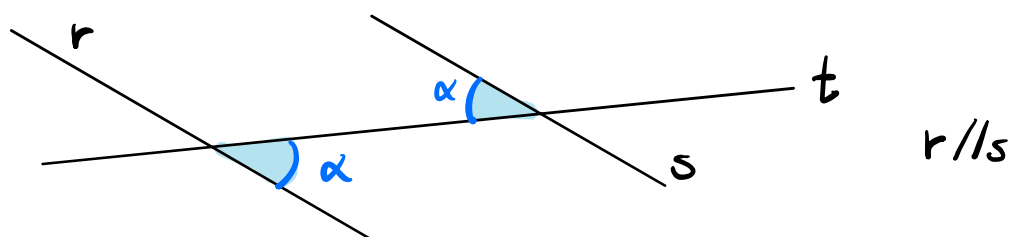
- ângulos opostos pelo vértice são congruentes (têm mesma medida)



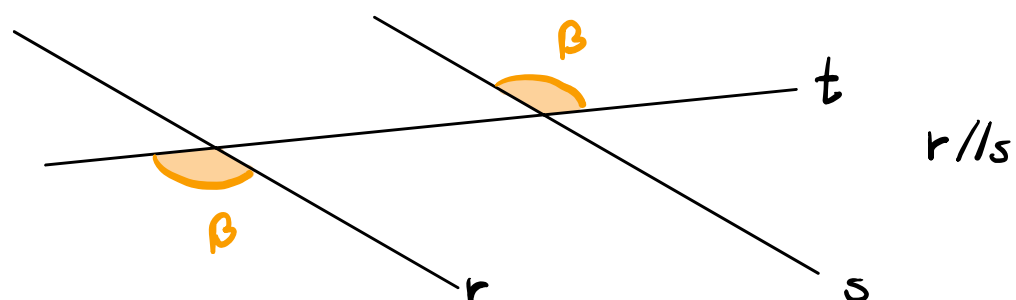
- ângulos correspondentes são congruentes



- ângulos alternos internos são congruentes

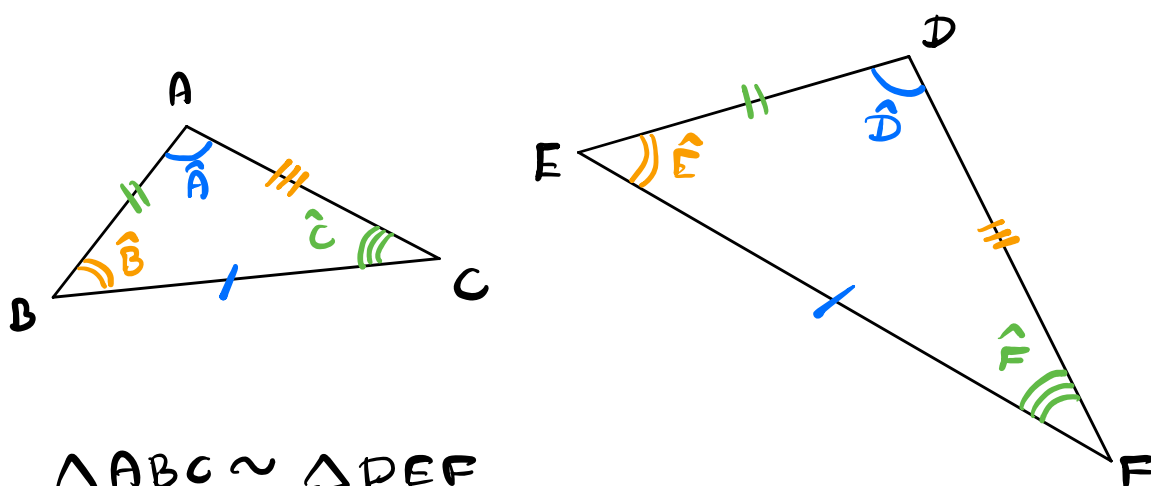


- ângulos alternos externos são congruentes



TRIÂNGULOS E O TEOREMA DE PITÁGORAS

• SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

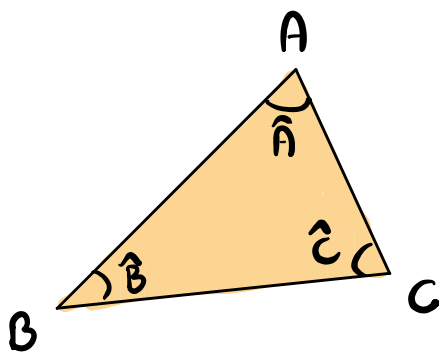
Se possuem os 3 ângulos ordenadamente congruentes $\Leftrightarrow$ os 3 lados são proporcionais à mesma razão

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \hat{D} \\ \hat{B} &= \hat{E} \\ \hat{C} &= \hat{F}\end{aligned}$$

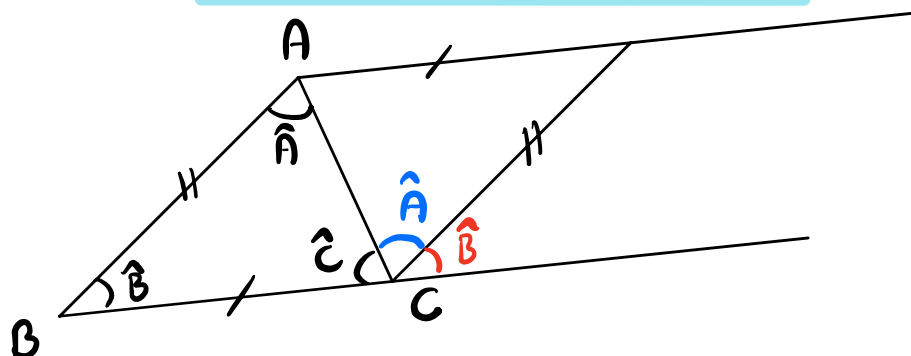
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

OBS: Se a razão de proporção é 1, então os triângulos são congruentes ($\triangle ABC \equiv \triangle DEF$)

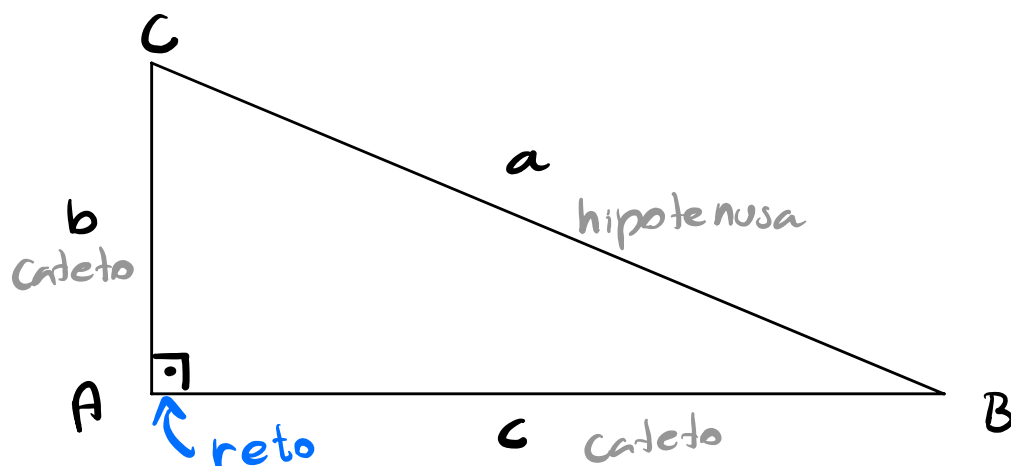
• SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ = \pi$$



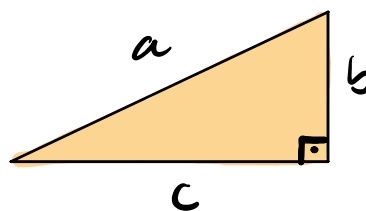
TRIÂNGULO RETÂNGULO



TEOREMA DE PITÁGORAS

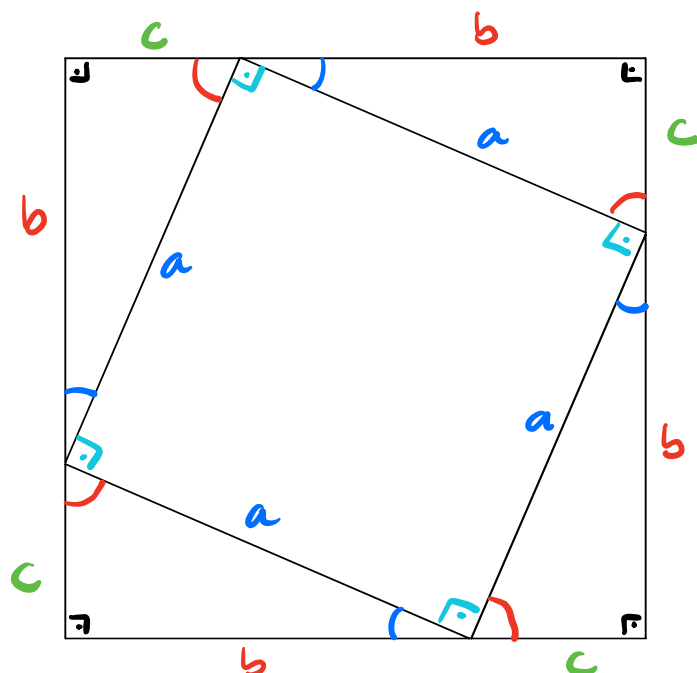


Pitágoras (570 aC - 495 aC)



$$a^2 = b^2 + c^2$$

PROVA:

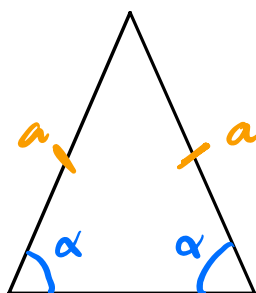


$$(b+c)^2 = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} bc = a^2 + 2bc$$

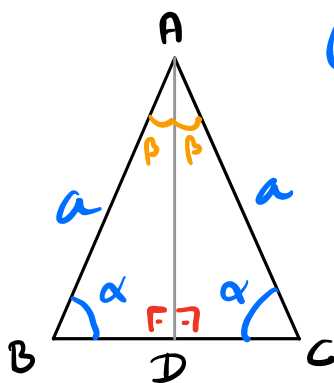
$$\cancel{b^2 + 2bc} + c^2 = a^2 + \cancel{2bc}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

• TRIÂNGULO ISÓSCELES

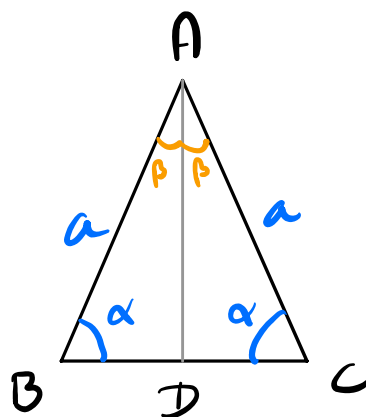


possui 2 ângulos congruentes
 $\Leftrightarrow$ possui 2 lados congruentes



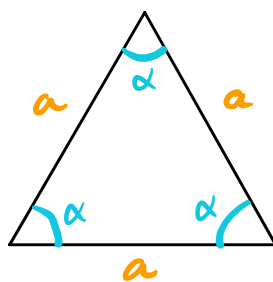
($\Rightarrow$) Trace AD tal que $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$.
 Como também $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ e a soma dos ângulos internos de um Δ é π , segue que $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}$ (pois são suplementares).
 $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD$ (pois AD é

comum). Daí, $\overline{AB} = \overline{AC}$.

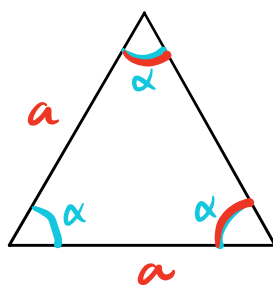


($\Leftrightarrow$) Trace AD tal que $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$.
Como também $\overline{AB} = \overline{AC}$ e
AD é comum, segue que
 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$, e então
 $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$.

• TRIÂNGULO EQUILÁTERO

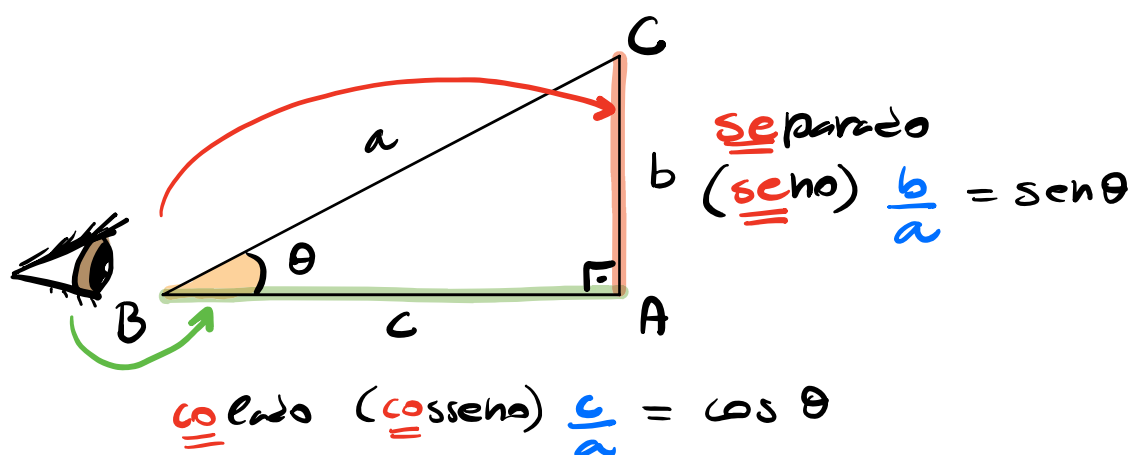
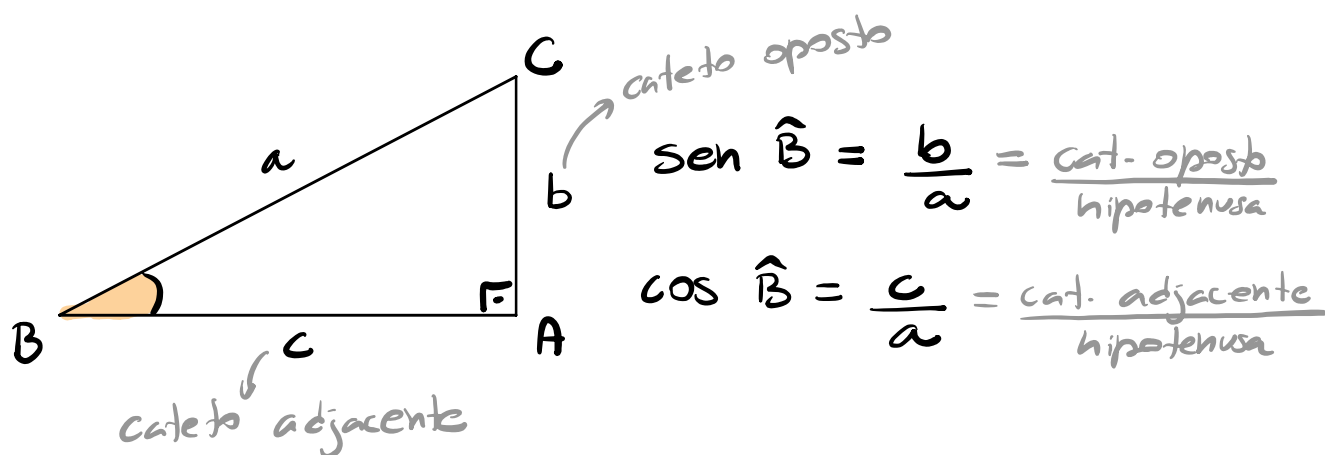


Possui todos os ângulos
congruentes ($60^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{3}$)
 $\Leftrightarrow$ possui todos os lados
congruentes



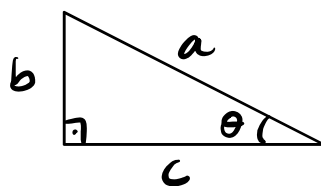
Para provar, basta ver que
o triângulo é isósceles em
qualquer par de ângulos/
lados.

SENO E COSSENO



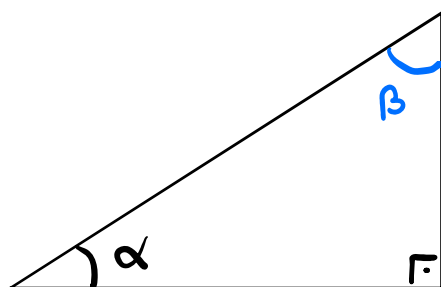
RELAÇÃO FUNDAMENTAL:

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$



$$\begin{aligned} \text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta &= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2} = 1 \quad \text{por Pitágoras} \end{aligned}$$

- ÂNGULOS COMPLEMENTARES



$$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$$

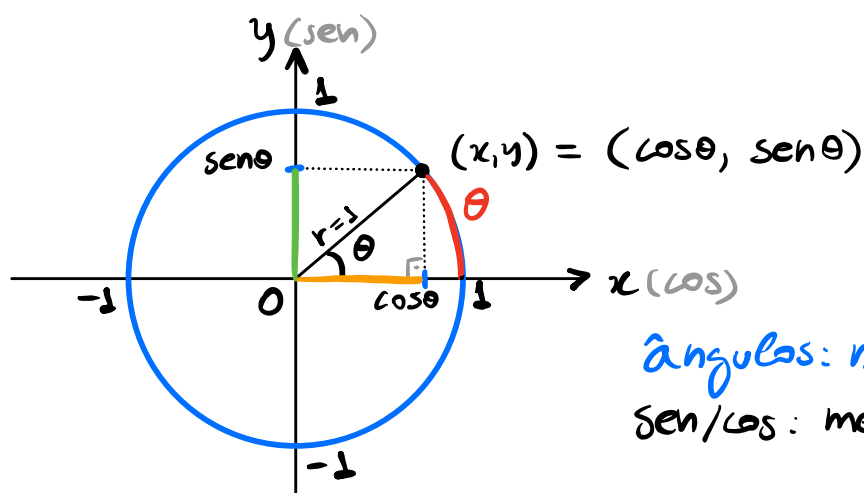
$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

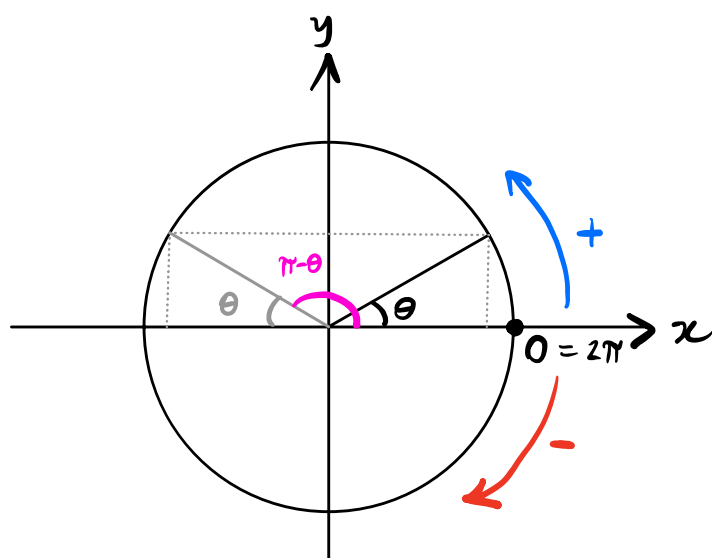
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha$$

CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO



Ângulos: medidos no círculo
Sen/cos: medidos nos eixos



Positivo: sentido anti-horário

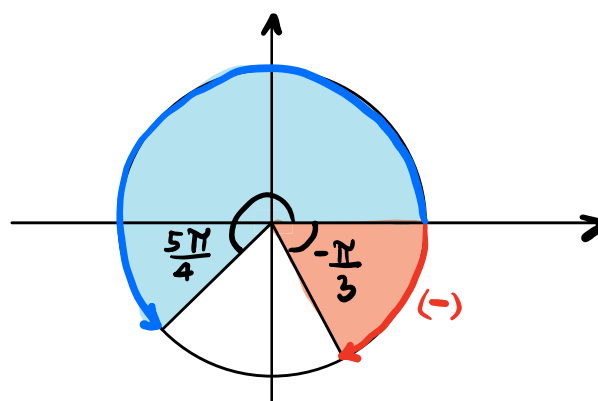
Negativo: sentido horário

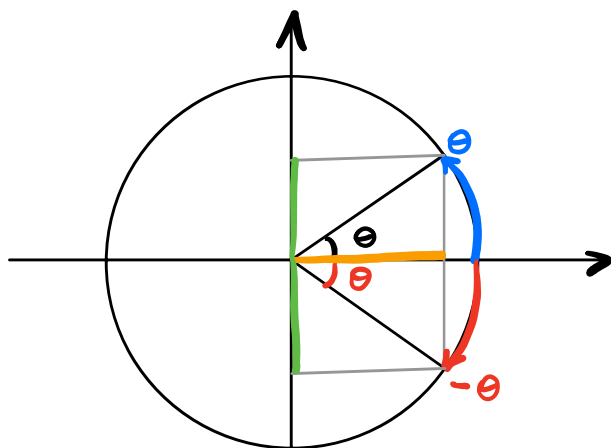
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\theta \equiv \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

EXEMPLO:



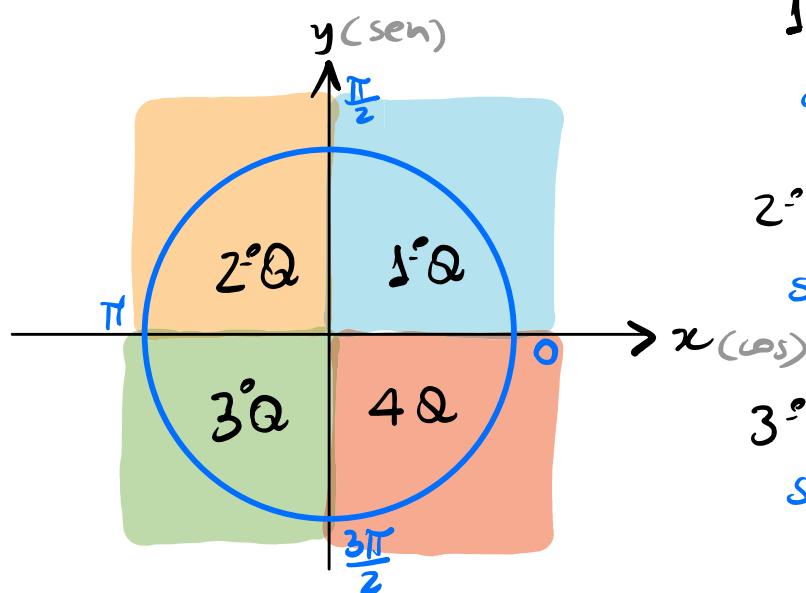
PARIDADE $\sin(\theta)$ E $\cos(\theta)$ 

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

cosseno é par

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

seno é função Ímpar

• QUADRANTES

$$1^\circ Q : \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\sin \theta, \cos \theta > 0$$

$$2^\circ Q : \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$$

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

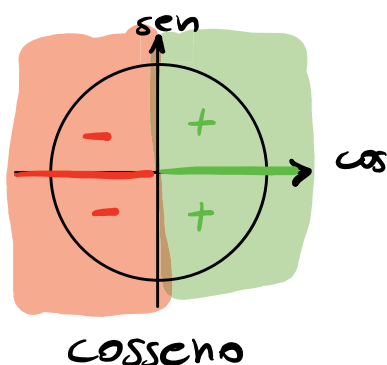
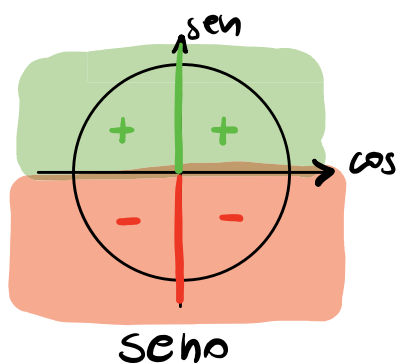
$$3^\circ Q : \theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$$

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

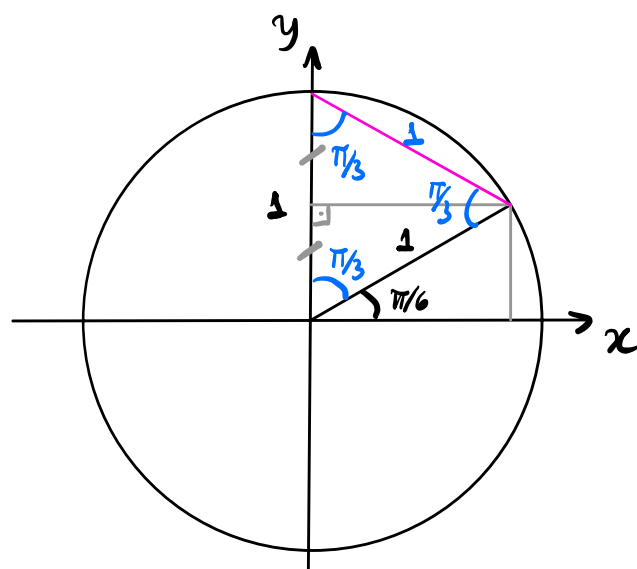
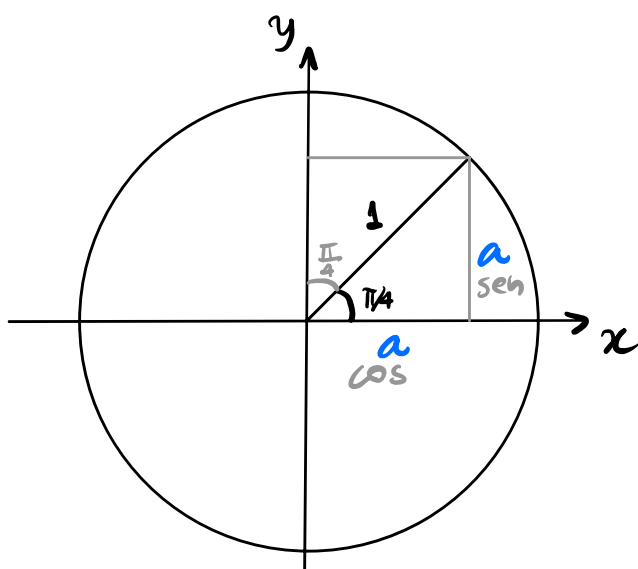
$$4^\circ Q : \theta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$$

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

- Esquema dos sinais:



• SENOS E COSSENOS DOS ÂNGULOS NOTÁVEIS



ângulo	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

$$a^2 + a^2 = 1$$

$$2a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

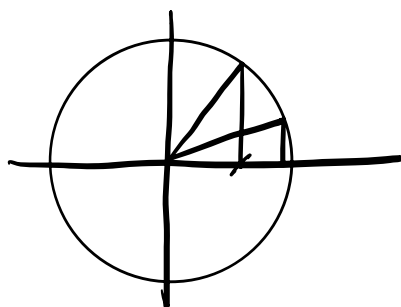
$$\cos^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como guardar: $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

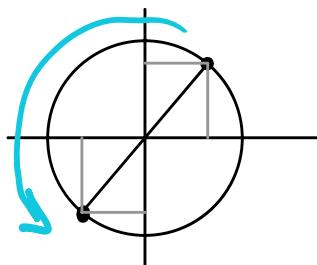
45° é $1/\sqrt{2}$ (Pitágoras)



$$30^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$60^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

OBS:



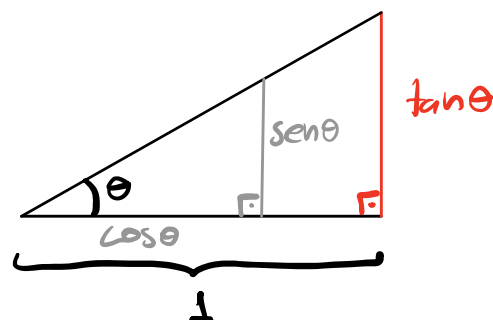
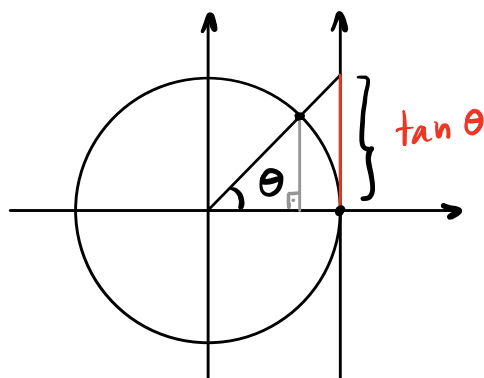
$$\operatorname{sen} (\theta + 2k\pi) = \operatorname{sen} \theta \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos (\theta + 2k\pi) = \cos \theta \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Pré-Cálculo: Funções Trigonômicas

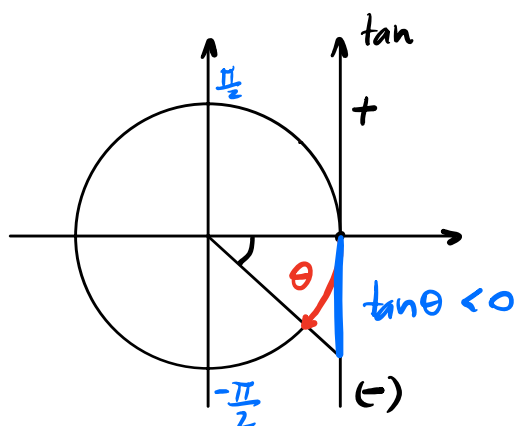
TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE, COSSECANTE

TANGENTE

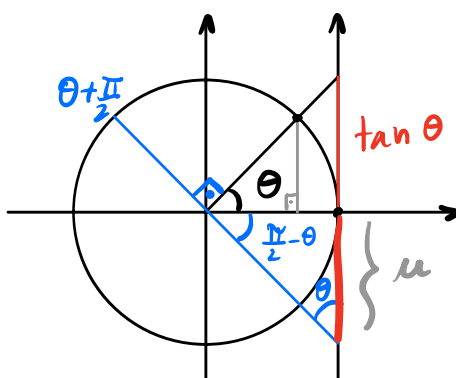


$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

(alguns escrevem $\text{tg } \theta$)



$$\tan \theta < 0 \text{ se } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

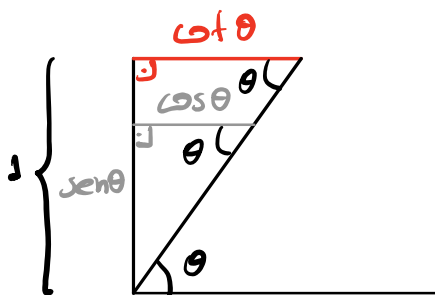
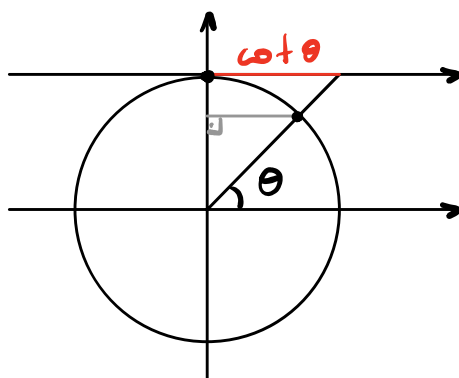


$$\frac{1}{\tan \theta} = \tan \theta$$

$$\Rightarrow |u| = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{-1}{\tan \theta}$$

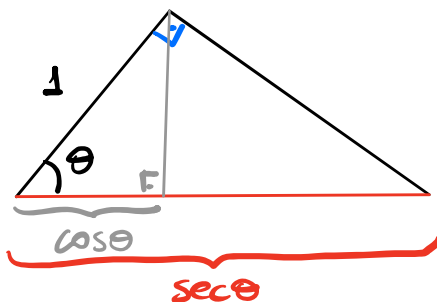
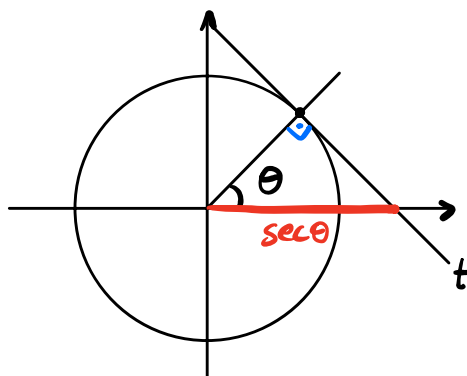
COTANGENTE



$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

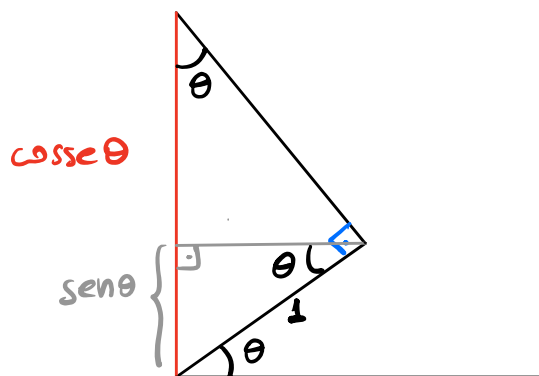
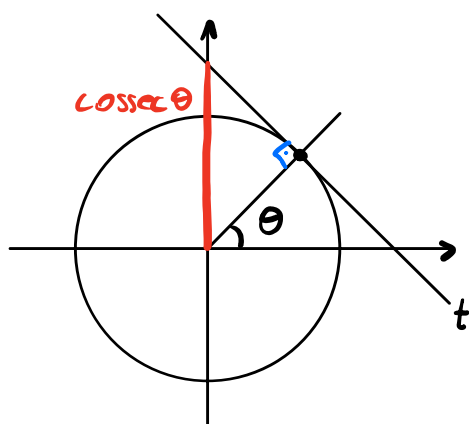
(alguns escrevem $\cot \theta$)

SECANTE



$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

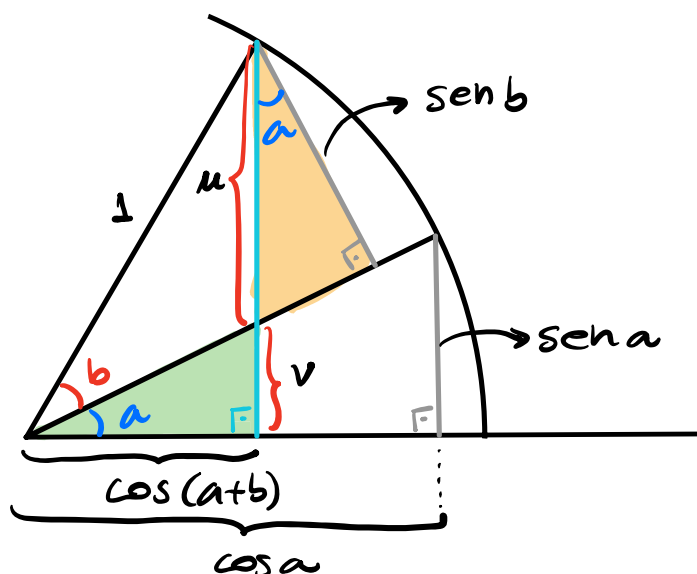
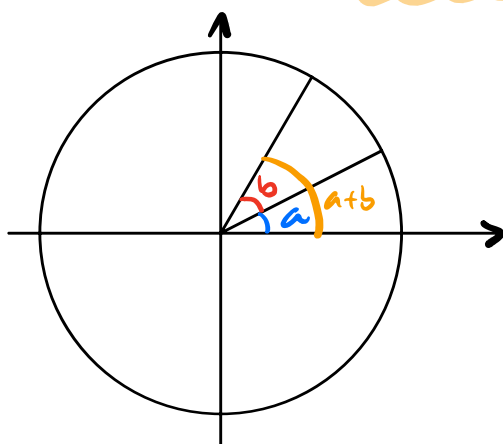
COSSECANTE



$$\cossec \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

(alguns escrevem $\csc \theta$)

$\cos(a+b)$



$$\frac{\sin b}{u} = \cos a \Rightarrow u = \frac{\sin b}{\cos a}$$

$$\frac{v}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a}{\cos a} \Rightarrow v = \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \cos(a+b)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2(a+b) + (u+v)^2 = \cos^2(a+b) + u^2 + 2uv + v^2 \\ &= \cos^2(a+b) + \frac{\sin^2 b}{\cos^2 a} + 2 \cdot \frac{\sin b}{\cos a} \cdot \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \cos(a+b) \\ &\quad + \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} \cdot \cos^2(a+b) \quad (\times \cos^2 a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos^2 a = (\cos^2 a + \sin^2 a) \cdot \cos^2(a+b) + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b \cos(a+b)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos^2(a+b)}_{y^2} + 2 \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \underbrace{\cos(a+b)}_y + \operatorname{sen}^2 b - \cos^2 a = 0$$

$$[\cos(a+b) + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b]^2 - \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 b - \cos^2 a = 0$$

$$\Rightarrow [\cos(a+b) + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b]^2 + (1 - \operatorname{sen}^2 a) \operatorname{sen}^2 b - \cos^2 a = 0$$

$$\Rightarrow [\cos(a+b) + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b]^2 + \cos^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b - \cos^2 a = 0$$

$$\Rightarrow [\cos(a+b) + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b]^2 - \cos^2 a (1 - \operatorname{sen}^2 b) = 0$$

$$\Rightarrow [\cos(a+b) + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b]^2 = \cos^2 a \cdot \cos^2 b$$

Logo:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

↑ sinal com mudança

Tem que saber!!

OBS :

$$\cos(a-b) = \cos[a + (-b)]$$

$$= \cos a \cdot \cos(-b) - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(-b)$$

$$\Rightarrow \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

EXEMPLO: Calcular $\cos(2\theta)$

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\boxed{\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta} \quad \text{importante}$$

EXEMPLO: Calcular $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

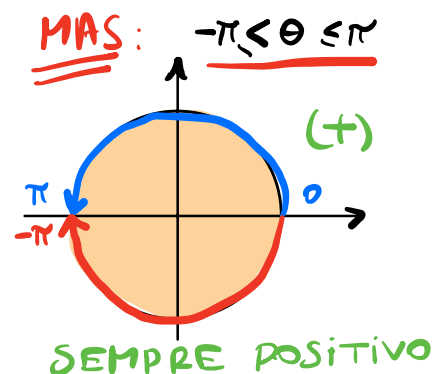
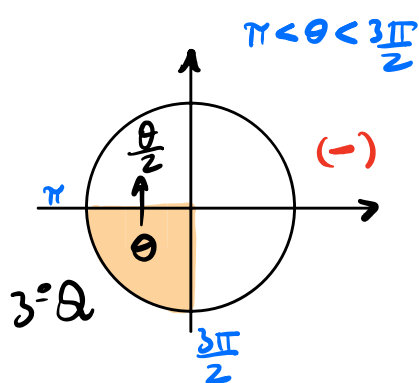
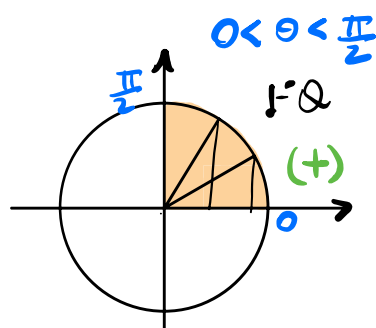
$$\cos \theta = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2} - \left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$$

OBS: o sinal depende de θ :



EXEMPLO: Calcular $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

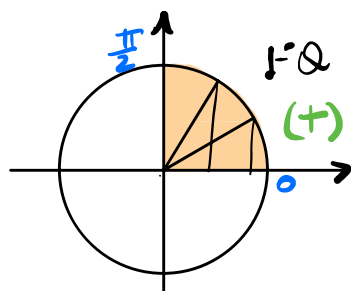
$$\cos \theta = \cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta \Rightarrow$$

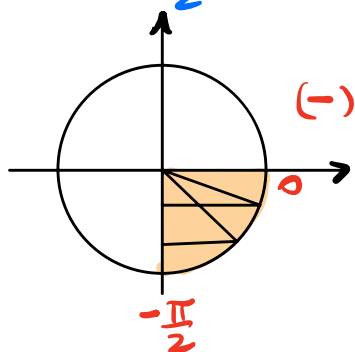
$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

OBS: o sinal depende de θ :

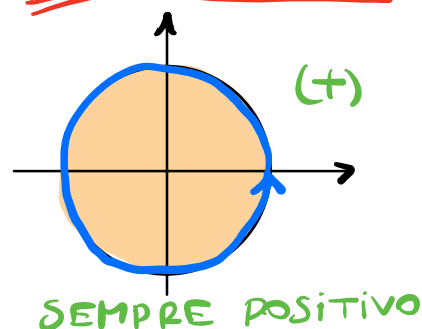
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$



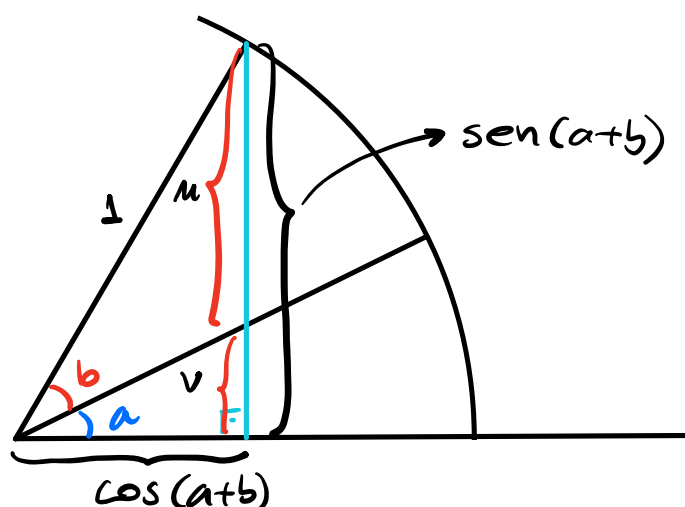
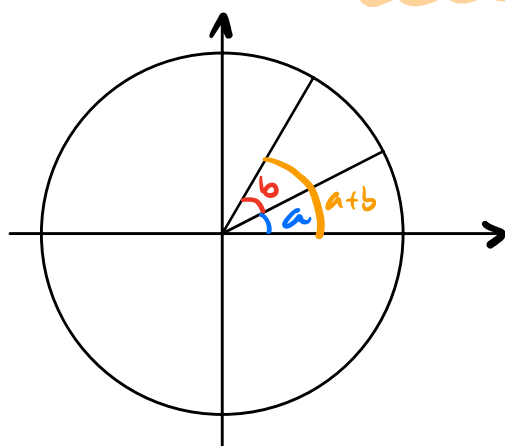
$$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$$



MAS $0 \leq \theta \leq 2\pi$



sen(a+b)



Lembre que:

$$u = \frac{\operatorname{sen} b}{\cos a}, \quad v = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \cos(a+b)$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = u + v = \frac{\operatorname{sen} b}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} [\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b]$$

$$= \frac{\operatorname{sen} b}{\cos a} + \operatorname{sen} a \cos b - \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos a} \cdot \operatorname{sen} b$$

$$= \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 a) \cdot \operatorname{sen} b}{\cos a} + \operatorname{sen} a \cos b$$

$$= \frac{\cancel{\cos^2 a}}{\cancel{\cos a}} \cdot \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cdot \cos b$$

Logo:

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}$$

→ sinal sem mudança

Tem que saber !!!

OBS:

$$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cdot \cos(-b) + \sin(-b) \cdot \cos a$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a}$$

EXEMPLO: calcular $\sin(2\theta)$

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cdot \cos \theta + \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta}$$

importante!

OUTRAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Todas as demais identidades são obtidas de 3 fatos:

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cdot \cos a$

EXEMPLO:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \sin b \cdot \sin a}$$

$$= \frac{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b} \left(\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} \right)}{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b} \cdot \left(1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b} \right)}$$

$$= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

EXEMPLO:

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(-b) = \frac{\text{sen}(-b)}{\cos(-b)} = -\frac{\text{sen } b}{\cos b} = -\tan b$$

$$\Rightarrow \tan(a-b) = \tan(a+(-b))$$

$$= \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \cdot \tan(-b)}$$

$$= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

EXEMPLO :

$$\text{sen } a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)]$$

$$\begin{aligned} \text{sen}(a+b) &= \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a \\ + \text{sen}(a-b) &= \text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a \end{aligned}$$

$$\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2 \cdot \text{sen } a \cos b$$

$$\Rightarrow \text{sen } a \cos b = \frac{1}{2} [\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)]$$

EXEMPLO :

$$\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ + \\ \cos b &= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

EXEMPLO:

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

EXEMPLO:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$= \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \cdot 2 \tan \frac{x}{2}$$

$$= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

EXEMPLO:

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin \left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{\cos \left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\cancel{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{\cancel{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}\right)} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E SEU GRÁFICO

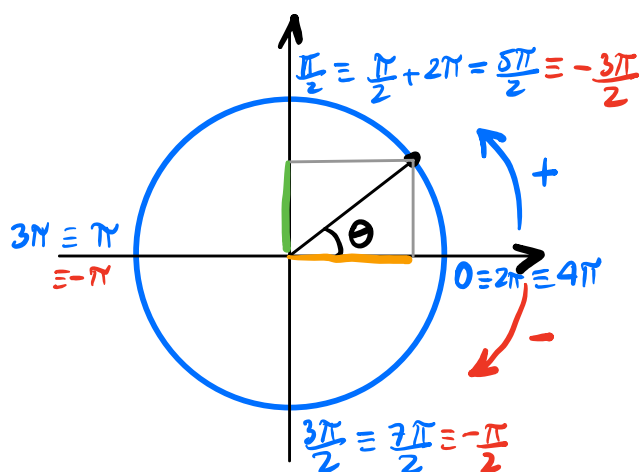
FUNÇÕES PERIÓDICAS

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica se $\exists P > 0$ tal que

$$f(x+P) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

O menor P que satisfaz a relação é o período de f .

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM $\mathbb{R}$

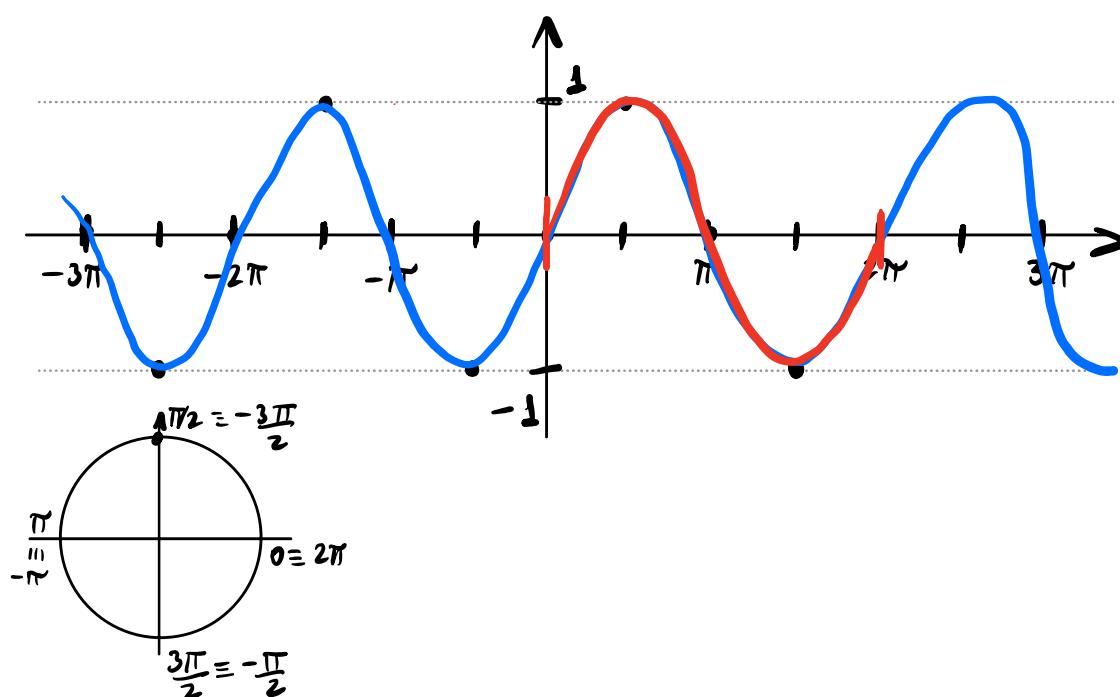


$$\theta \equiv \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

SENO

$$\begin{aligned} \text{sen}: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \text{sen } x \end{aligned}$$

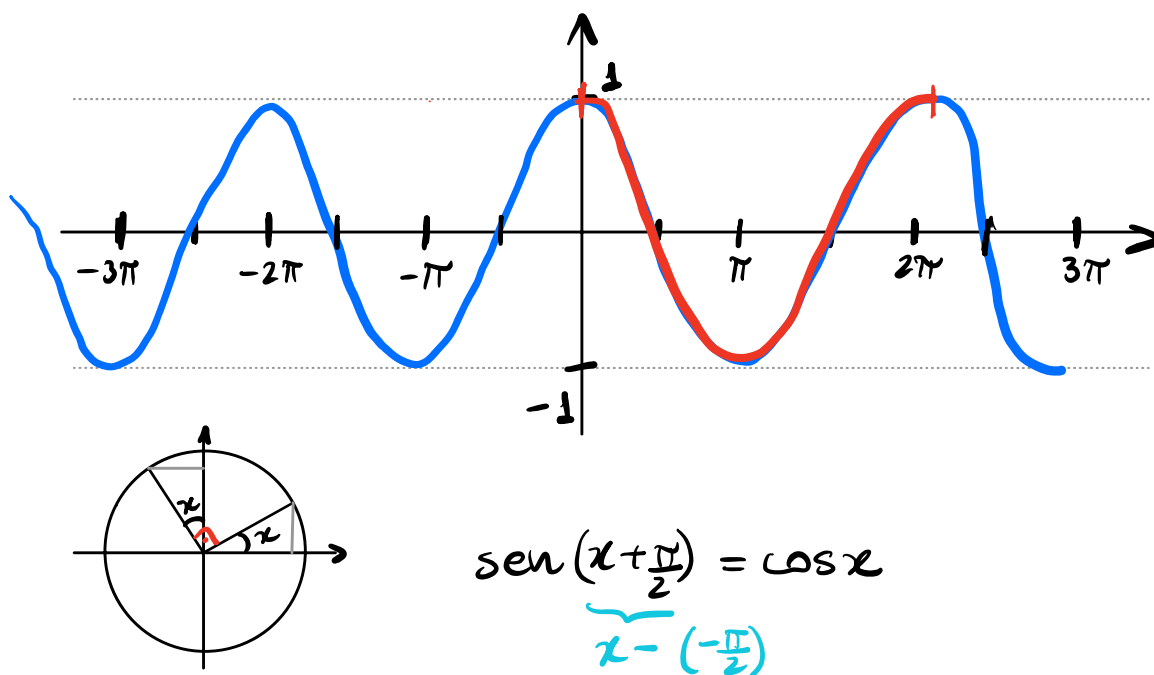
Temos $\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen } x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$,
e $\text{sen } x$ é periódica de período 2π

COSSENO

$$\begin{aligned} \cos: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

é periódica de período 2π :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$



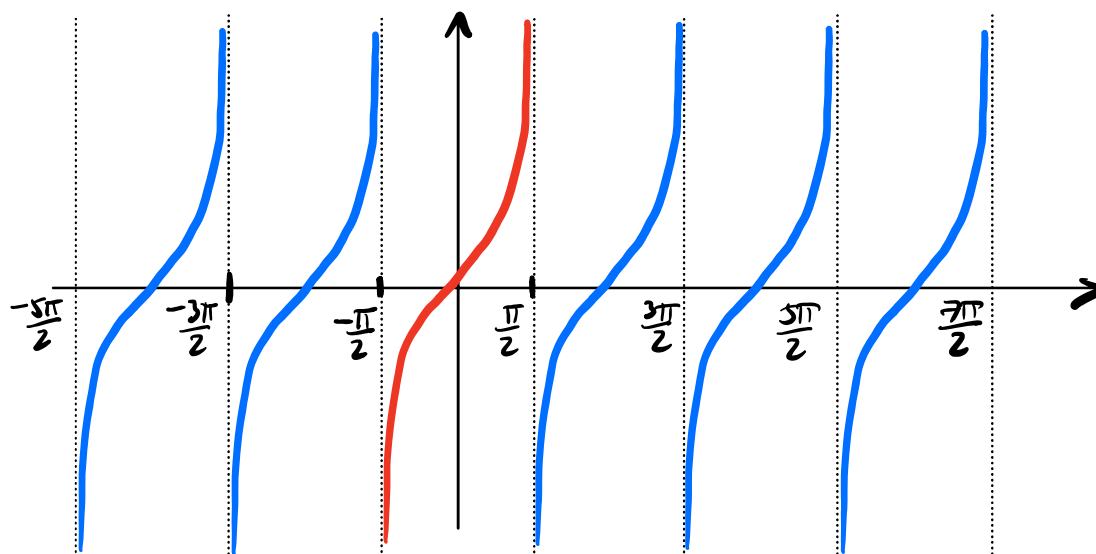
TANGENTE

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cos x \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

$x \quad \xrightarrow{\quad \quad \quad} \quad \tan x$



$\tan$ é periódica de período π :

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

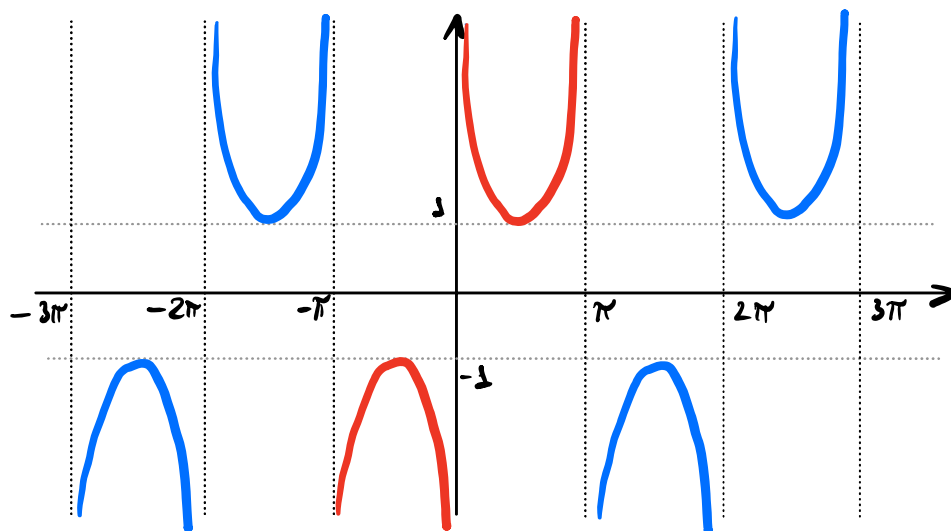
$$\tan(x + \pi) = \frac{\tan x + \tan \pi}{1 - \tan x \tan \pi} = \tan x$$

COSSECANTE

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{cosec}: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \operatorname{cosec} x$$



$$\operatorname{cosec}(x + 2\pi) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

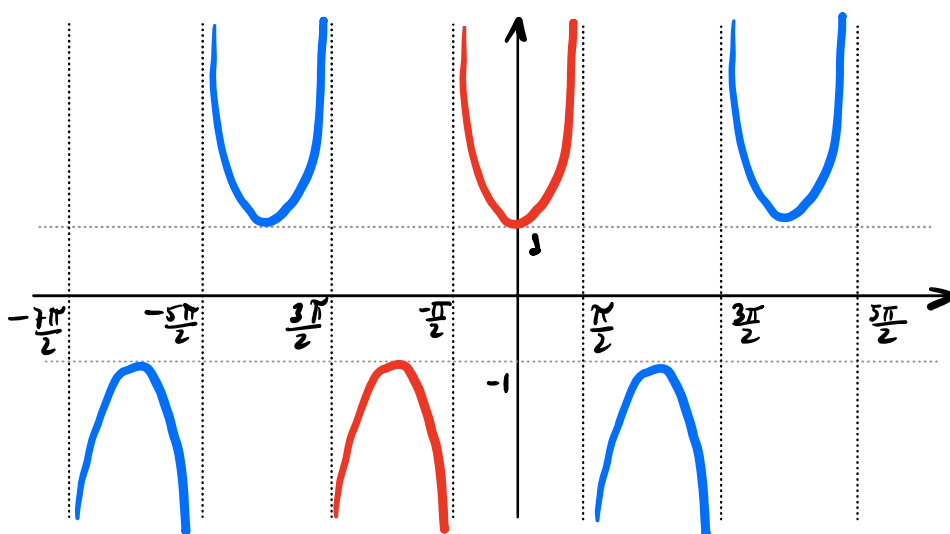
↖ período 2π

SECANTE

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sec: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sec x$$



$$\sec(x + 2\pi) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

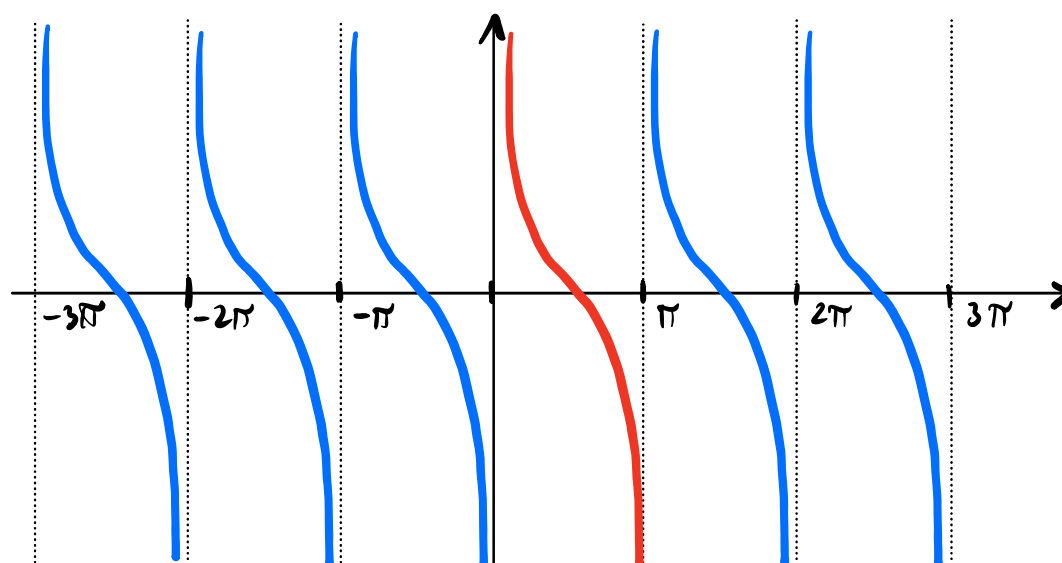
↖ período 2π

COTANGENTE

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot: \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \cot x$$

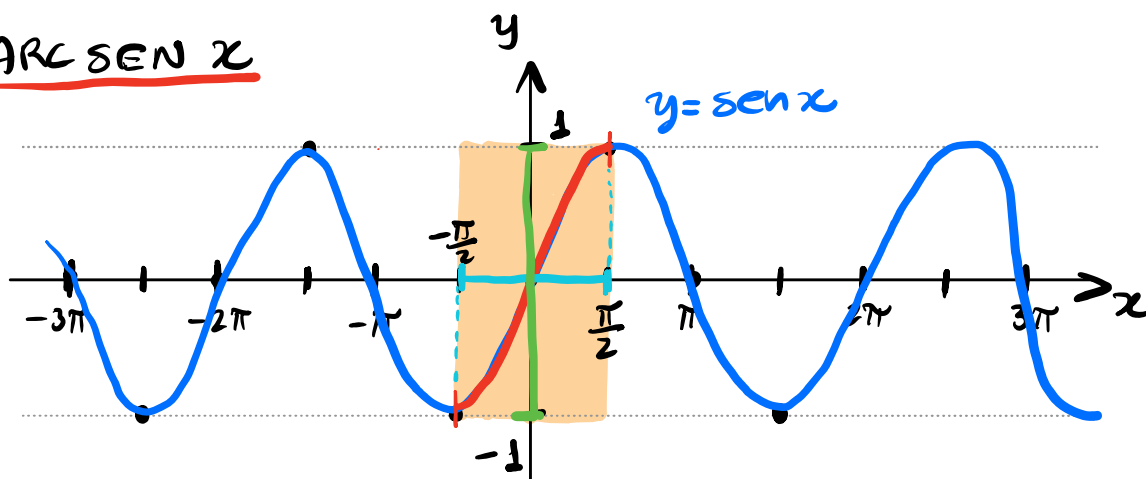


$$\cot(x + \pi) = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

↪ período π

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

ARCSEN x



$\text{sen } x$ é bijetora em

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \text{sen } x \in [-1, 1]$$

Logo, possui inversa

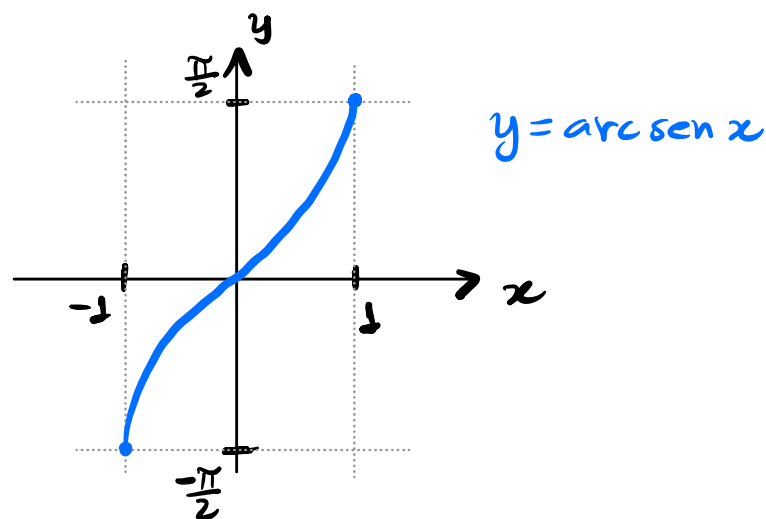
$$\text{arcsen} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$x \mapsto$ "arco cujo seno vale x "

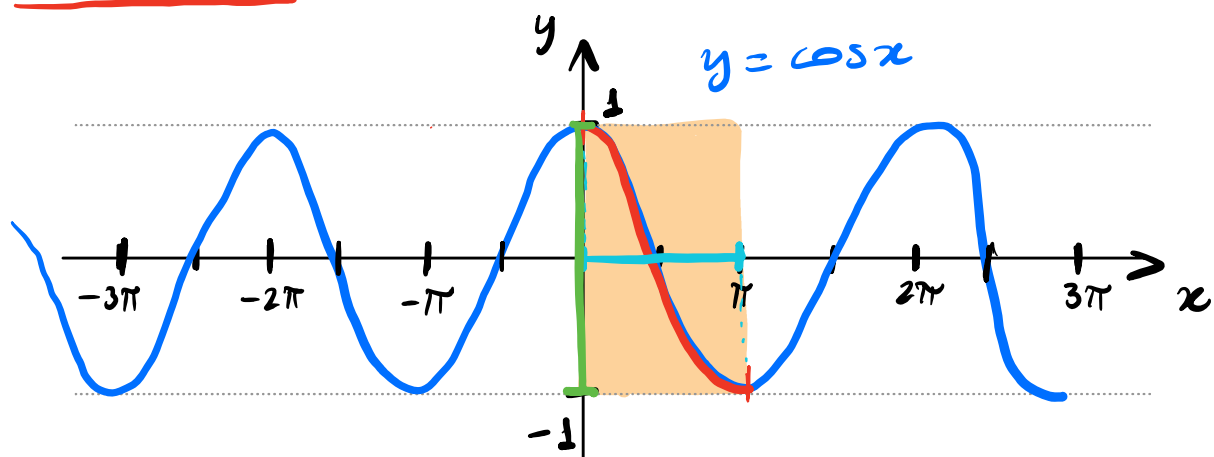
que satisfaz

$$y = \text{arcsen } x \Leftrightarrow \text{sen } y = x$$

(alguns escrevem $\text{sen}^{-1}x$ para $\text{arcsen } x$)



ARCCOS x



$\cos x$ é bijetora em

$$x \in [0, \pi] \longrightarrow \cos x \in [-1, 1]$$

Logo, possui inversa

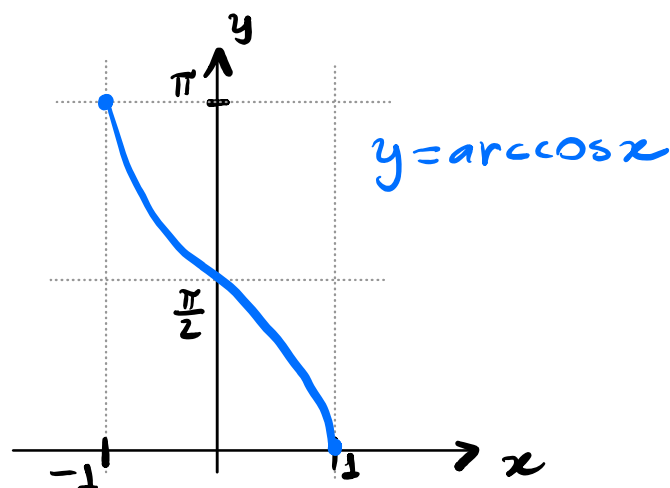
$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$x \longmapsto$ "arco cujo cosseno vale x "

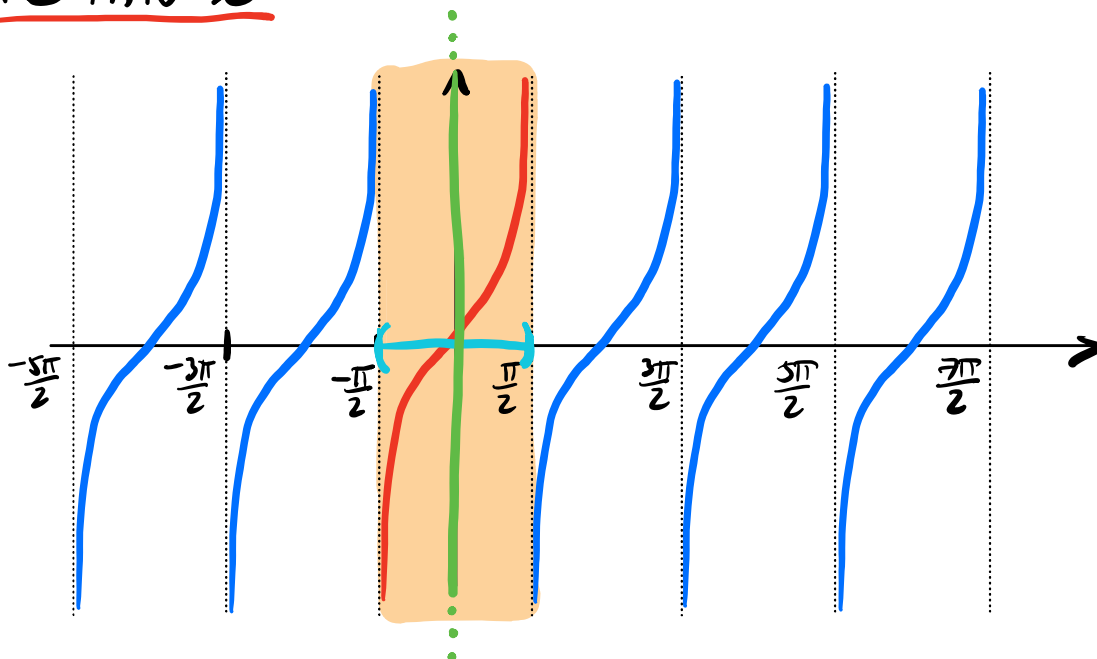
que satisfaz

$$y = \arccos x \iff \cos y = x$$

(alguns escrevem $\cos^{-1}x$ para $\arccos x$)



ARC TAN x



$\tan x$ é bijetora em

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \tan x \in (-\infty, \infty)$$

Logo, possui inversa

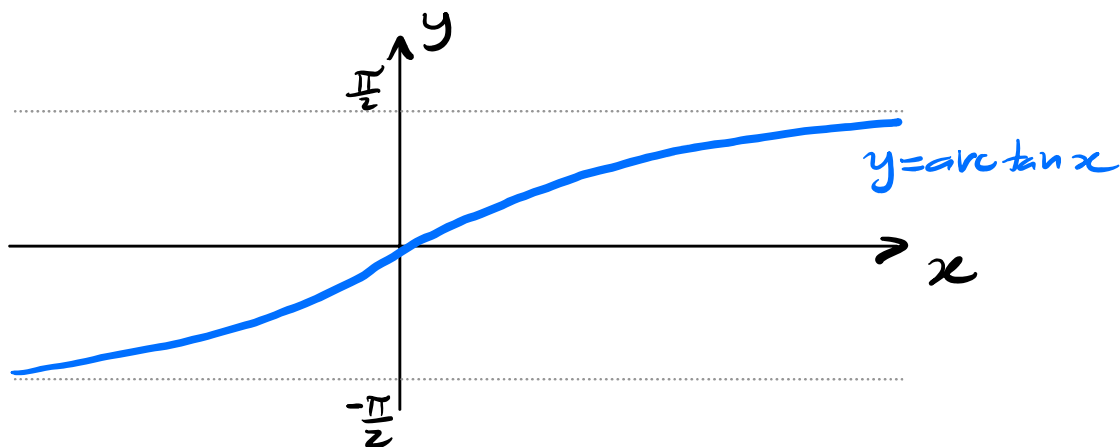
$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$x \mapsto$ "arco cuja tangente vale x "

que satisfaz

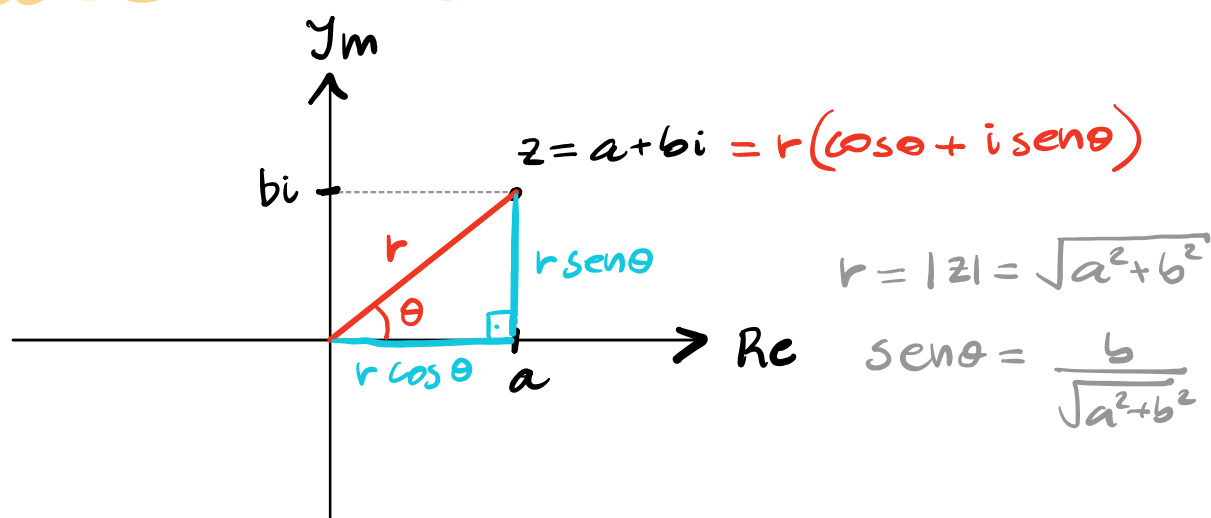
$$y = \arctan x \iff \tan y = x$$

(alguns escrevem $\tan^{-1}x$ para $\arctan x$)



Pré-Cálculo: Números Complexos (Forma Polar)

NÚMEROS COMPLEXOS: FORMA POLAR



$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

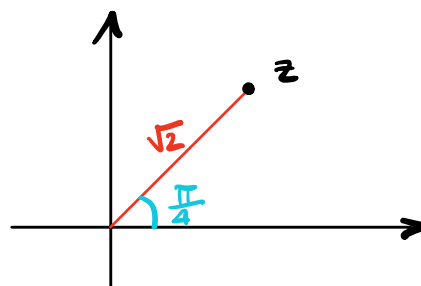
EXEMPLO: Escreva na forma polar:

a) $z = 1 + i$

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

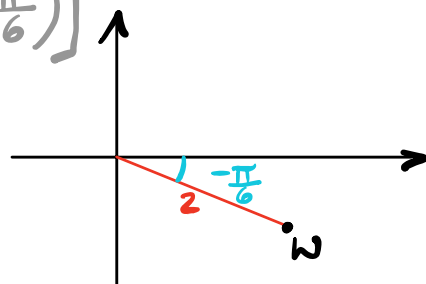


$$b) w = \sqrt{3} - i$$

$$r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\text{sen } \theta = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$w = 2 \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

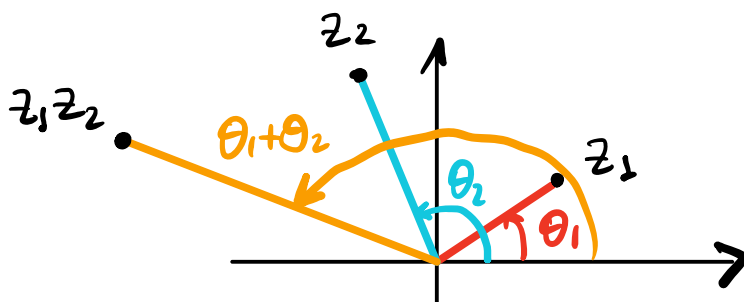


PRODUTO E DIVISÃO NA FORMA POLAR

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \text{sen } \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \text{sen } \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \right]$$



PROVA:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\
&= r_1 \cdot r_2 \left[\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \right. \\
&\quad \left. + i \cdot (\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) \right] \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad \square
\end{aligned}$$

EXEMPLO: Encontre $z \cdot w$ na forma polar, onde $z = 1 + i$ e $w = \sqrt{3} - i$

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad w = 2 \cdot \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] \\
zw &= 2\sqrt{2} \cdot \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\
&= 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \square
\end{aligned}$$

• **DIVISÃO:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

PROVA:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Basta provar que $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} \cdot \frac{(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{\underbrace{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}_1} = \frac{1}{r} [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]$$

Logo,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

$$= r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot \frac{1}{r_2} [\cos(-\theta_2) + i \operatorname{sen}(-\theta_2)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$



FÓRMULA DE DE MOIVRE E RAÍZES N-ÉSIMAS

• FÓRMULA DE DE MOIVRE

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

$$z^3 = z \cdot z^2 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

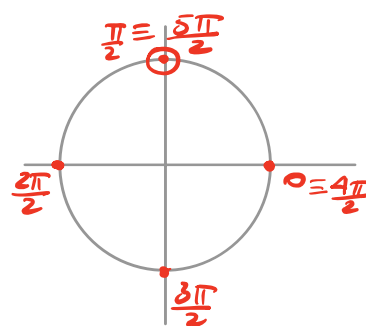
EXEMPLO: Encontre $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$

$$z = \frac{1}{2}(1 + i) \quad |z| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1/2}{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} z^{10} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10} \cdot \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{10\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2^5} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} \right) \end{aligned}$$



$$= \frac{i}{32}$$

Se $n \in \mathbb{N}$ e $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, então

$$z^{-1} = r^{-1} \cdot [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]$$

$$z^{-2} = z^{-1} \cdot z^{-1} = r^{-2} [\cos(-2\theta) + i \operatorname{sen}(-2\theta)]$$

$$z^{-3} = z^{-1} \cdot z^{-2} = r^{-3} [\cos(-3\theta) + i \operatorname{sen}(-3\theta)]$$

Logo,

$$z^{-n} = r^{-n} \cdot [\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)]$$

1ª FÓRMULA DE DE MOIVRE:

$$z^m = r^m \cdot (\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

• RAÍZES N-ÉSIMAS

Achar w tal que

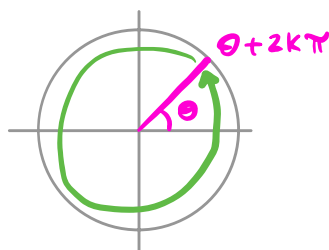
$$w^n = z$$

$$w = s(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi), \quad z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$\Rightarrow w^n = s^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) \\ = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$\Rightarrow s = \sqrt[n]{r}, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

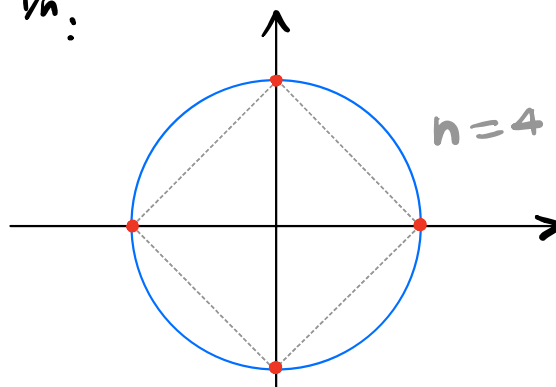


Logo, as n raízes n -ésimas de $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ são

$$w = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Todas as raízes n -ésimas estão no círculo de raio $|z|^{1/n}$:



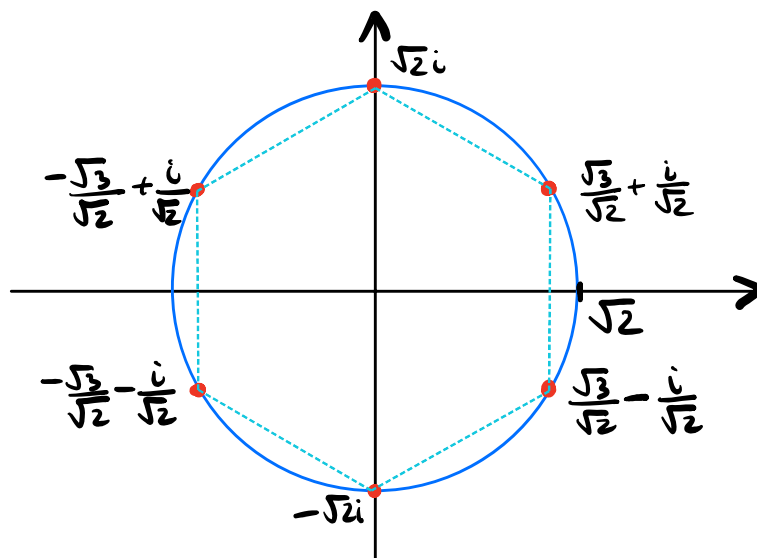
EXEMPLO: Encontre todas as raízes sextas de -8 no plano complexo.

$$z = -8 = 8 \cdot (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$$

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[6]{8} \cdot \left[\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 2k\pi}{6} \right) \right] \\ &= \sqrt[6]{8} \left\{ \cos \left[(2k+1) \frac{\pi}{6} \right] + i \operatorname{sen} \left[(2k+1) \frac{\pi}{6} \right] \right\}, \\ &\quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

Os ângulos são:

$$\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}, \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

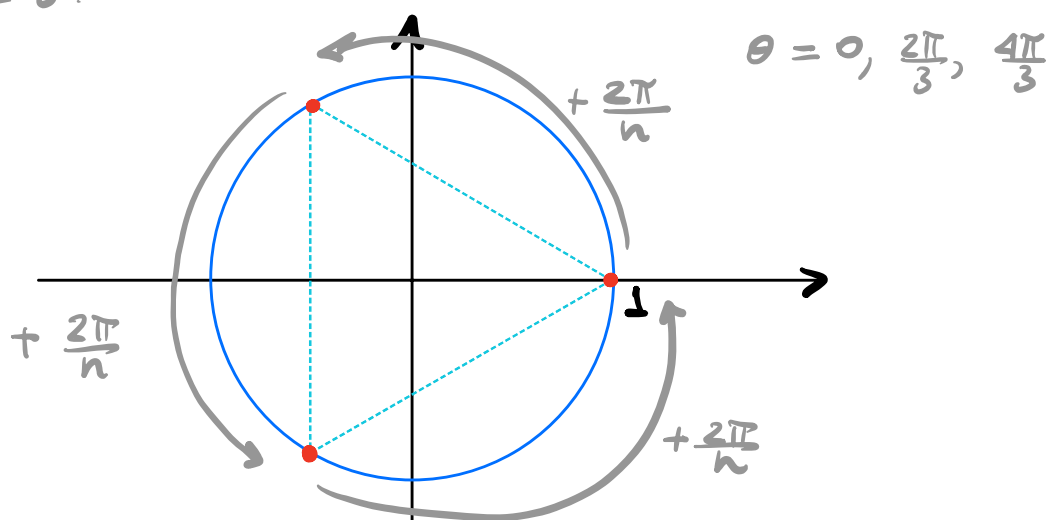


EXEMPLO (Raízes da unidade)

$$z^n = 1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$$

$$z = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$n = 3$:



As raízes n -ésimas da unidade formam um polígono regular de n lados com um dos vértices em $z=1$

Parte I: Pré-Cálculo

GEOMETRIA ANALÍTICA

Pré-Cálculo: Geometria Analítica - Plano Cartesiano e Retas

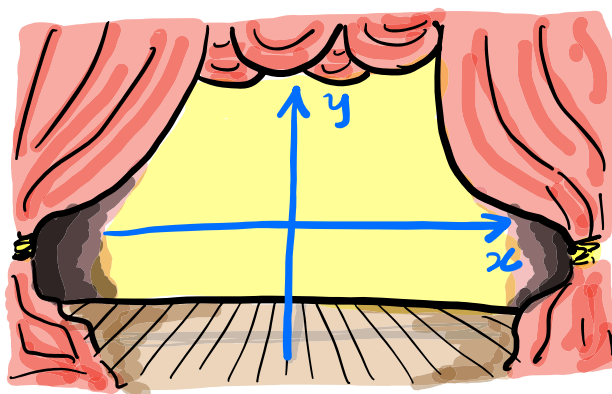
GEOMETRIA ANALÍTICA

PLANO CARTESIANO

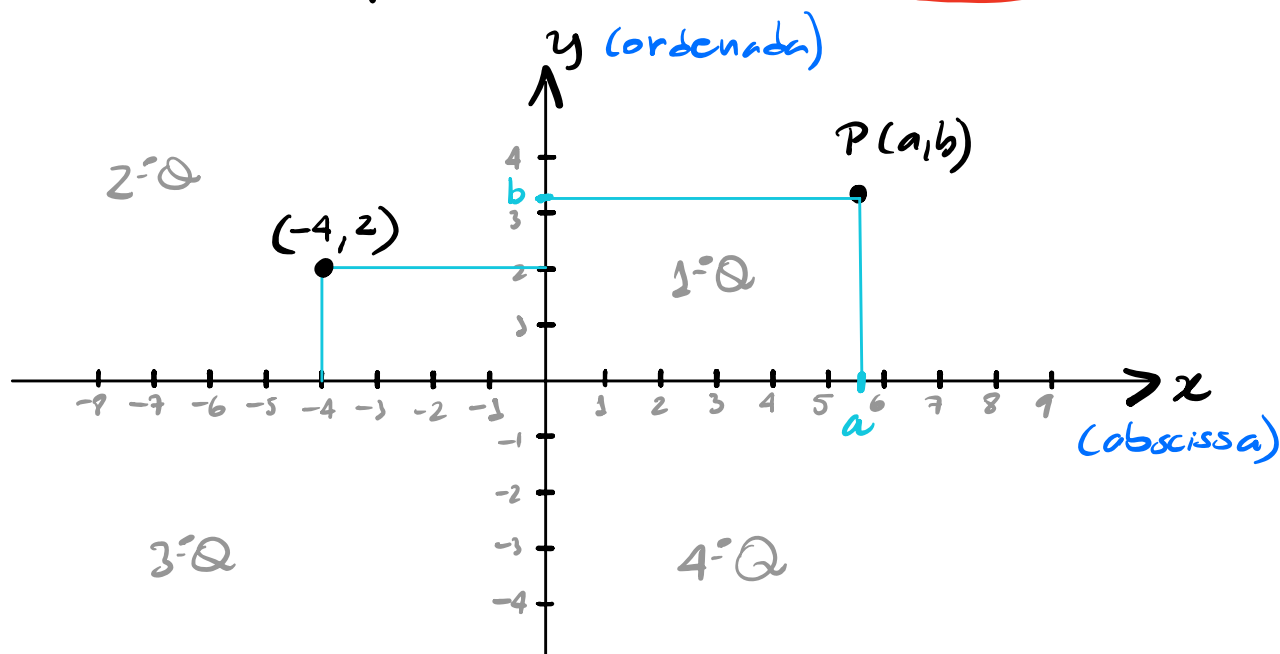
O sistema de coordenadas é o palco do cálculo!

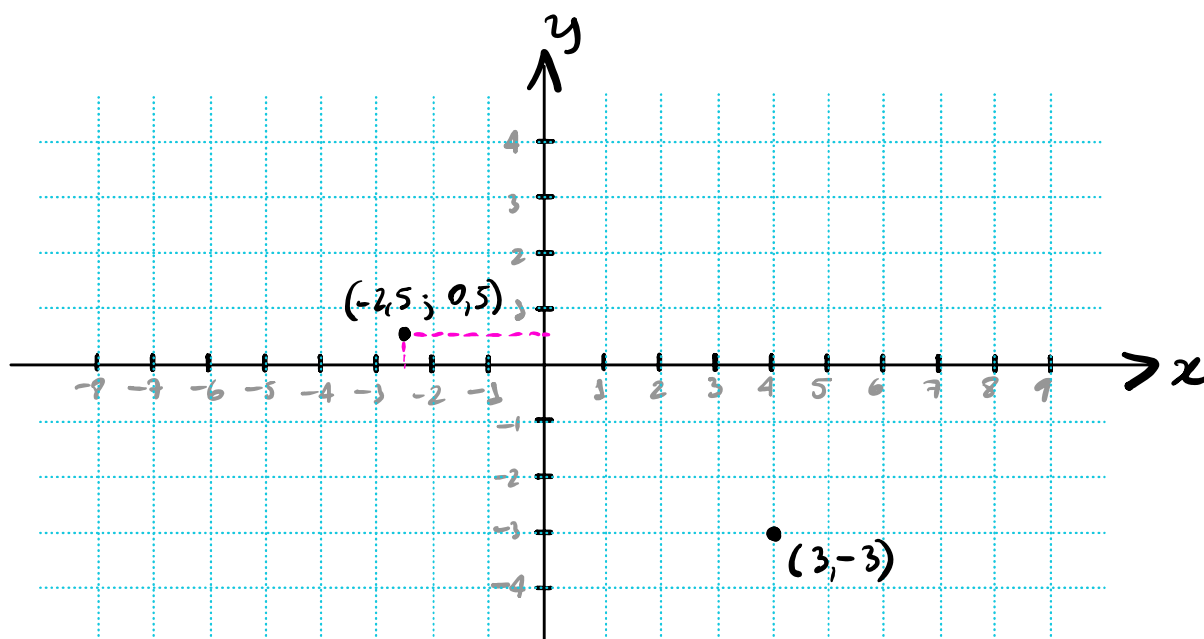


Descartes (1596-1650)



- Par de eixos perpendiculares: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$





Representação de conjuntos: produto cartesiano

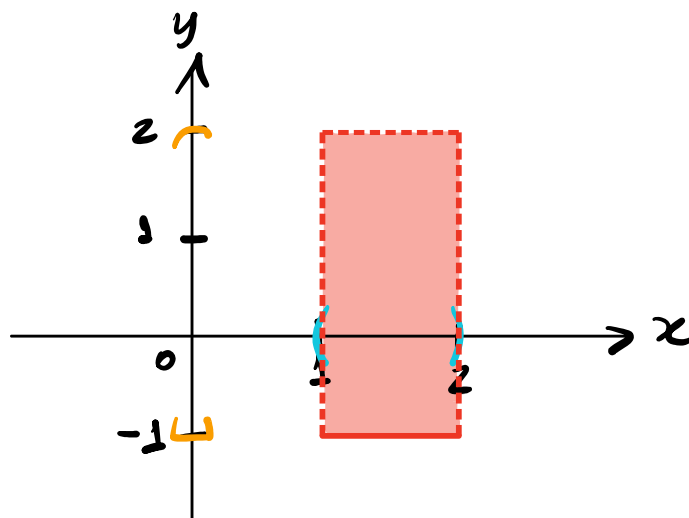
$A, B \subset \mathbb{R}$. Definimos seu produto cartesiano

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

EXEMPLO:

$$(1, 2) \times [-1, 2)$$

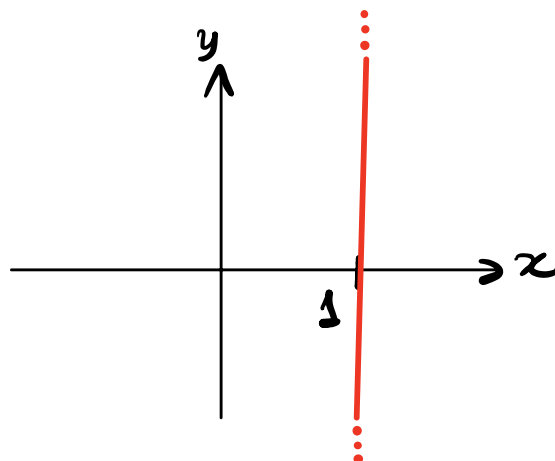
$$= \{(x, y) \mid 1 < x < 2 \text{ e } -1 \leq y < 2\}$$



EXEMPLO:

$$\{1\} \times \mathbb{R}$$

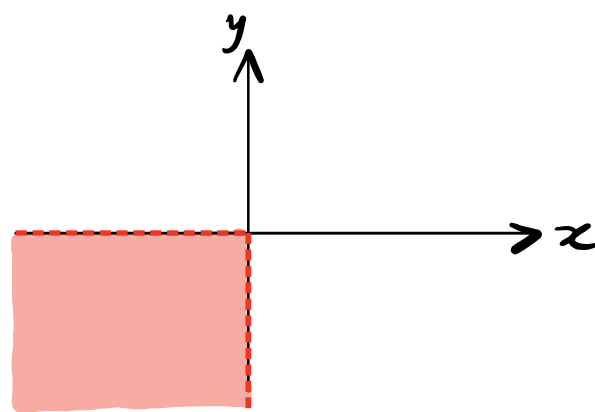
$$= \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$



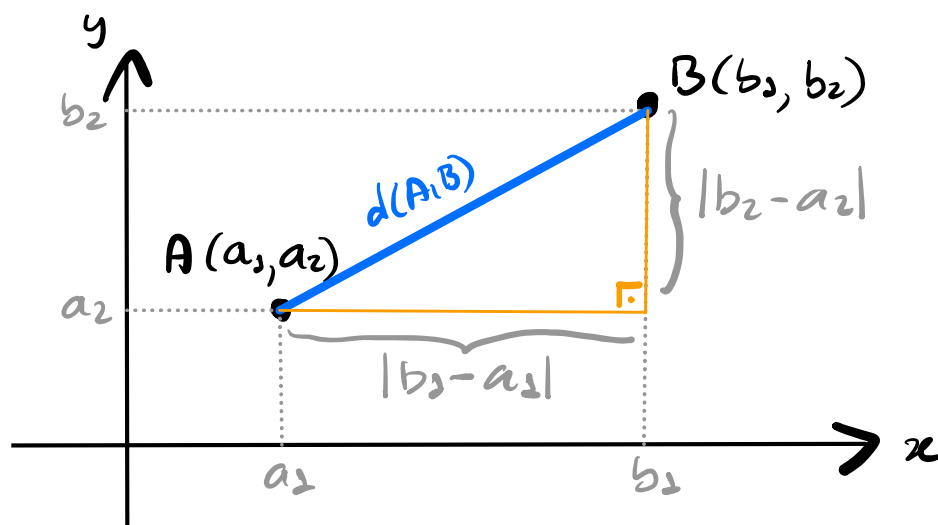
EXEMPLO:

$$(-\infty, 0) \times (-\infty, 0)$$

$$= \{(x, y) \mid x < 0, y < 0\}$$



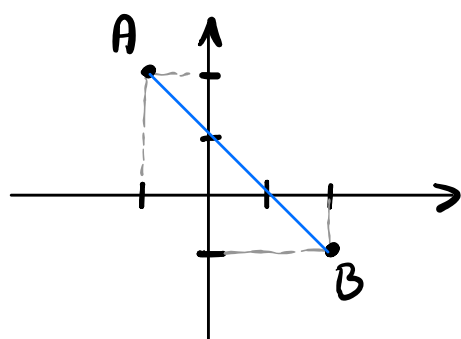
DISTÂNCIA ENTRE 2 PONTOS



$$d^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

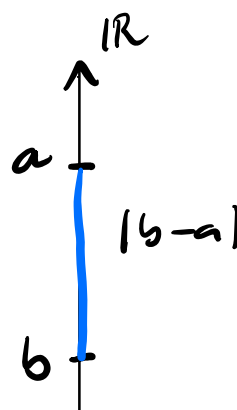
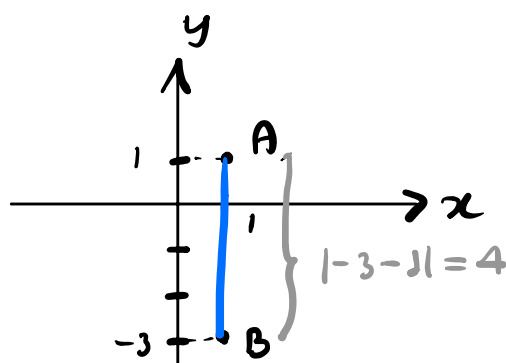
$$\Rightarrow d(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

EXEMPLO: Calcular a distância entre os pontos $A(-1, 2)$ e $B(2, -1)$



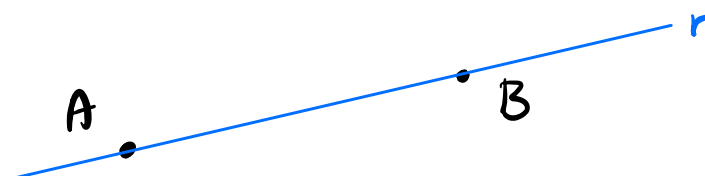
$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-1 - 2)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} \\ &= 3 \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

EXEMPLO: Calcular a distância entre $A(1, 1)$ e $B(1, -3)$

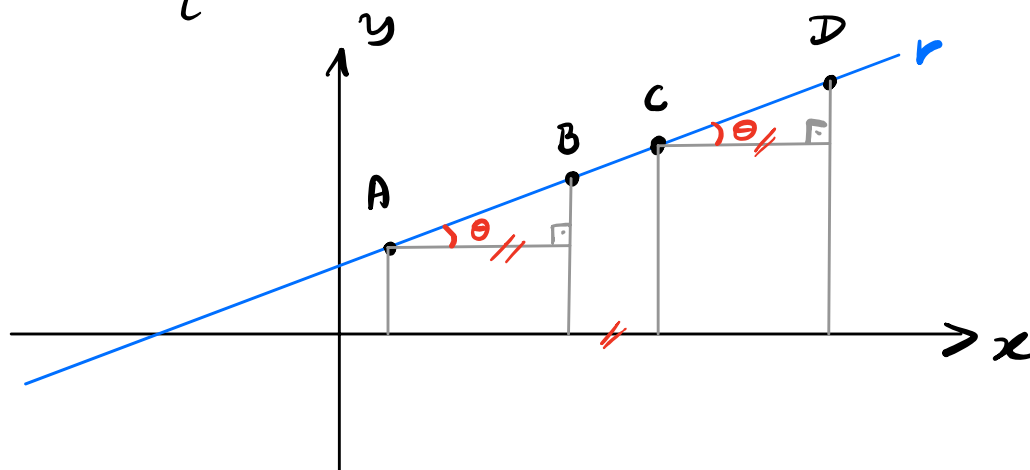


EQUAÇÃO DA RETA

Uma reta é determinada por 2 pontos:

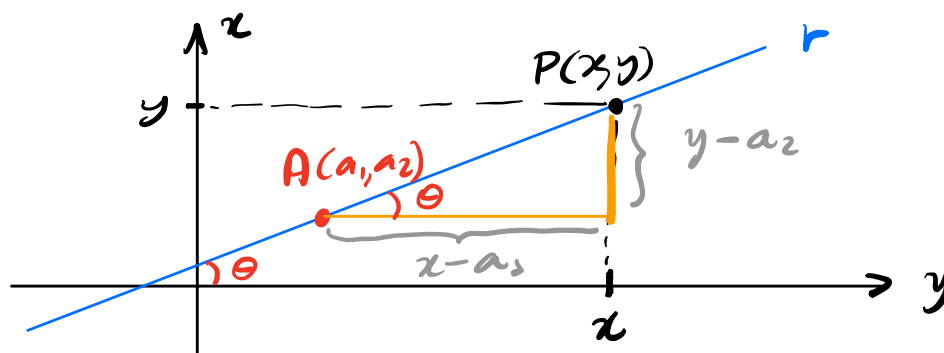


A inclinação da reta é constante:



Caracterização de $\theta \rightarrow \tan \theta$ (inclinação da reta)

$A(a_1, a_2) \in r + \tan \theta \Rightarrow$ determinar eq. reta.



$$\frac{y - a_2}{x - a_1} = \tan \theta = m$$

$$\Rightarrow y - a_2 = m(x - a_1)$$

$$\Rightarrow y = \underline{m} \cdot x + \underbrace{a_2 - m \cdot a_1}_b$$

$$\text{Eq. reta: } y = m \cdot x + b$$

OBS: Para incluir o caso de retas verticais do tipo $x = a$, a equação mais geral da reta é

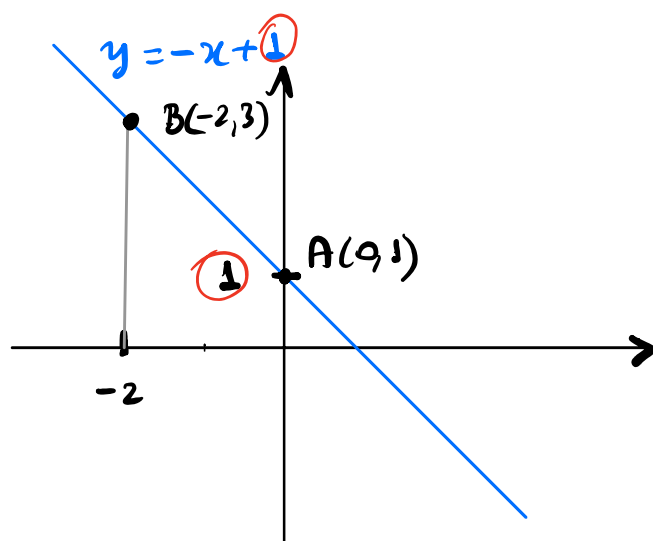
$$ax + by = c \quad (a^2 + b^2 > 0)$$

EXEMPLO: Determinar a equação da reta que passa pelos pontos $A(0, 1)$ e $B(-2, 3)$

inclinação: $m = \frac{3-1}{-2-0} = \frac{2}{-2} = -1$ $\theta = -\frac{\pi}{4}$

$$\text{eq: } \frac{y-1}{x-0} = m \Rightarrow \frac{y-1}{x} = -1$$

$$\Rightarrow y = -x + 1$$

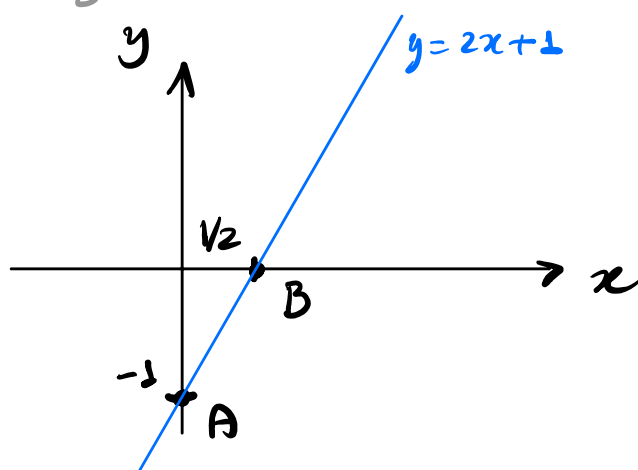


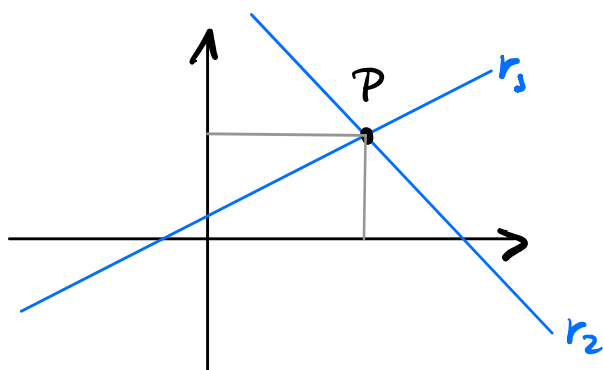
EXEMPLO: Traçar o gráfico da reta $y = 2x - 1$

Determine 2 pontos:

$$x = 0 \Rightarrow y = -1 \quad A(0, -1)$$

$$y = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$



INTERSEÇÃO DE RETAS

$$r_1: y = m_1x + b_1$$

$$r_2: y = m_2x + b_2$$

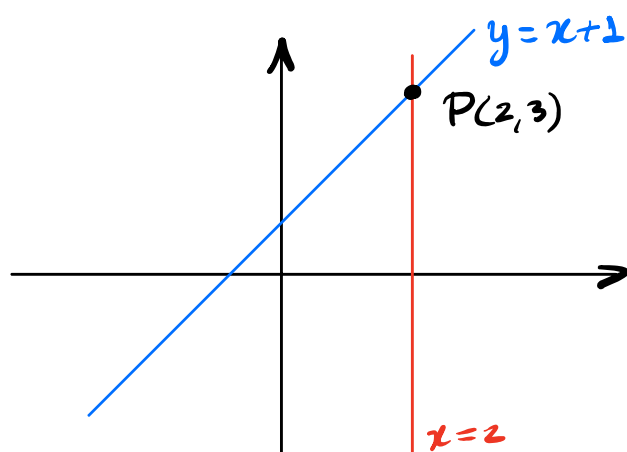
$$r_1 \cap r_2 = P(x, y)$$

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$$

$$\Rightarrow (m_1 - m_2)x = b_2 - b_1$$

$$\Rightarrow x = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \quad (\text{se } m_1 \neq m_2)$$

EXEMPLO: Determine a interseção entre as retas $y = x + 1$ e $x = 2$.



$$\text{Faça } x = 2:$$

$$y = 2 + 1 = 3$$

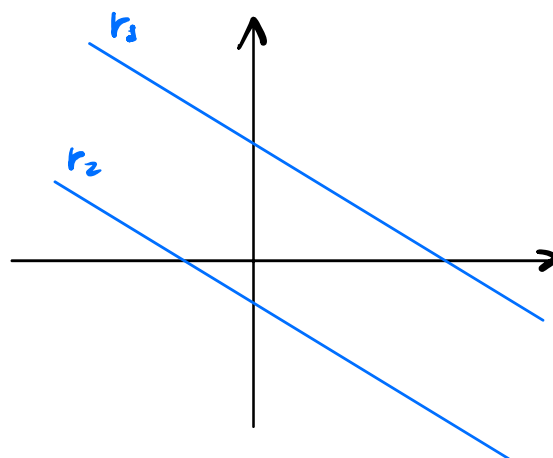
$$P(2, 3)$$

RETAS PARALELAS

$$r_1: y = m_1 x + b_1$$

$$r_2: y = m_2 x + b_2$$

r_1 e r_2 são paralelas
se, e só se, $m_1 = m_2$



$\Rightarrow$ nunca se interceptam (se $b_1 \neq b_2$)

$$\cancel{m_1 x} + b_1 = \cancel{m_2 x} + b_2 \Rightarrow \text{absurdo!}$$

EXEMPLO: Determine a reta paralela a $2x + 3y - 5 = 0$ e que passa por $(1, 3)$

$$3y = -2x + 5$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

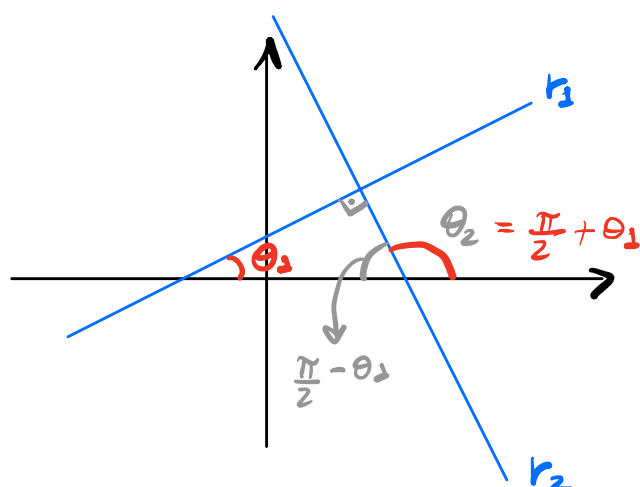
$$m = -\frac{2}{3}$$

Eq. reta passando por $(1, 3)$

$$\frac{y-3}{x-1} = -\frac{2}{3}$$

$$y-3 = -\frac{2}{3}(x-1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

RETAS PERPENDICULARES

$$r_1: y = m_1 x + b_1$$

$$r_2: y = m_2 x + b_2$$

$$\theta_2 + \frac{\pi}{2} - \theta_1 = \pi$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \theta_1$$

$$m_2 = \tan \theta_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right) = \frac{-1}{\tan \theta_1} = -\frac{1}{m_1}$$

$$r_1 \text{ e } r_2 \text{ são perpendiculares} \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

EXEMPLO: Mostre que as retas $2x + 3y = 1$ e $6x - 4y = 3$ são perpendiculares.

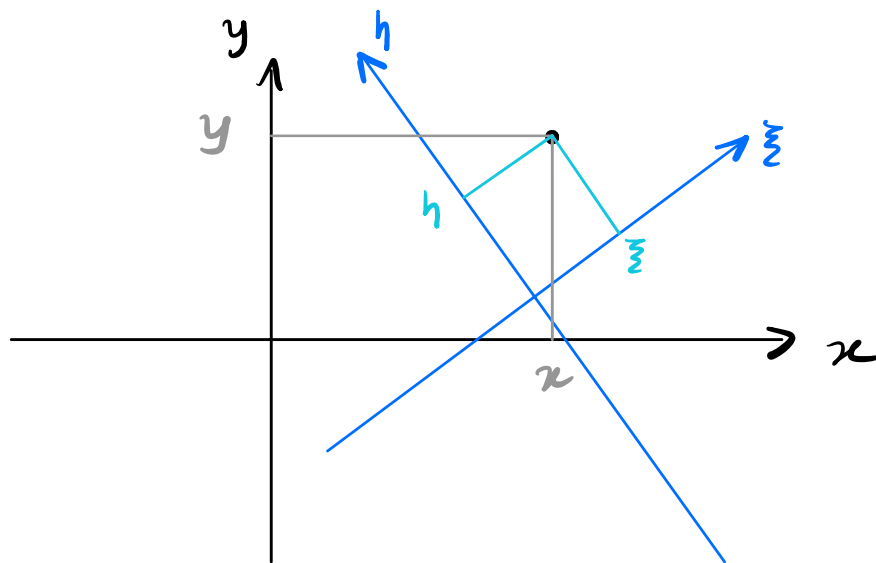
$$r_1: 3y = -2x + 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m_1 = -\frac{2}{3}$$

$$r_2: 4y = 6x - 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{2}$$

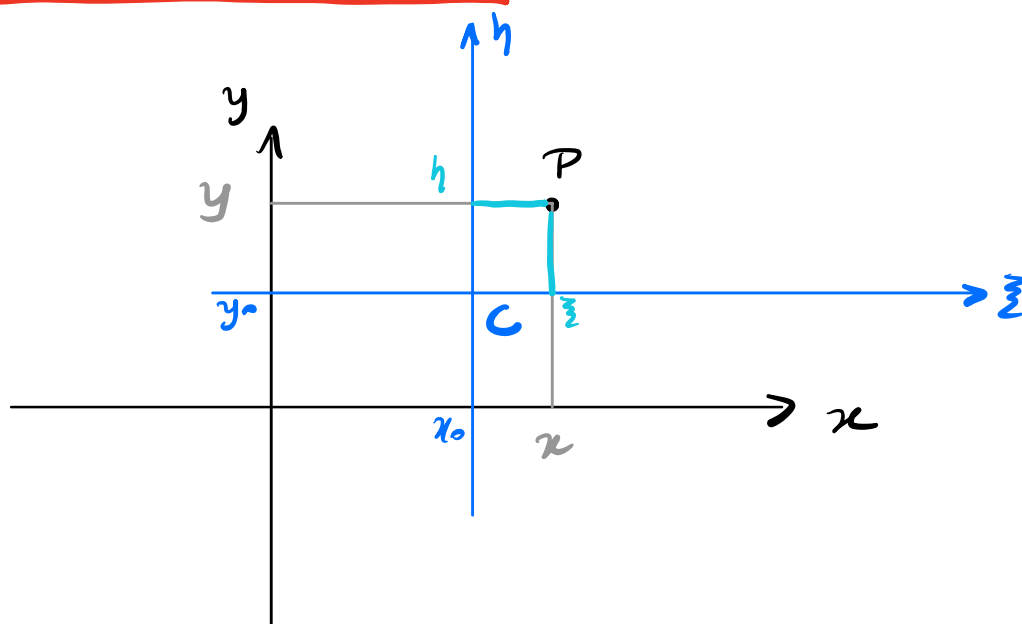
$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow r_1 \perp r_2$$

Pré-Cálculo: Geometria Analítica - Cônicas

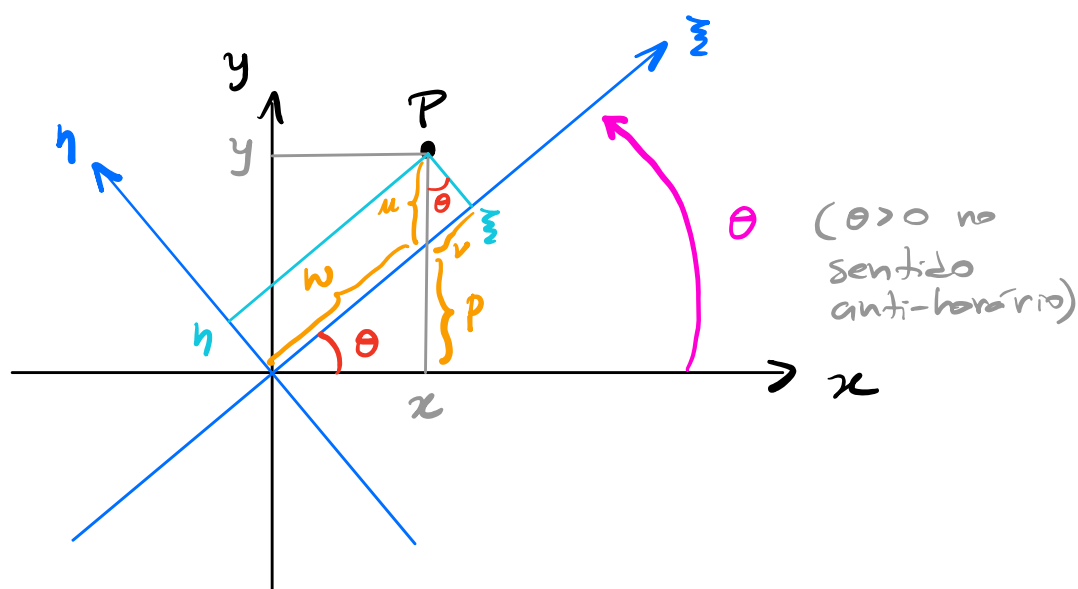
MUDANÇA DE COORDENADAS



1º CASO: TRANSLAÇÃO



$$\xi = x - x_0 \quad \eta = y - y_0$$

2º CASO : ROTAÇÃO

$$\frac{p}{x} = \tan \theta \Rightarrow p = x \cdot \tan \theta$$

$$\frac{x}{w} = \cos \theta \Rightarrow w = \frac{x}{\cos \theta}$$

$$u = y - p = y - \frac{x \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y \cos \theta - x \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$h = u \cos \theta = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$v = u \sin \theta = \frac{y \sin \theta \cos \theta - x \sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

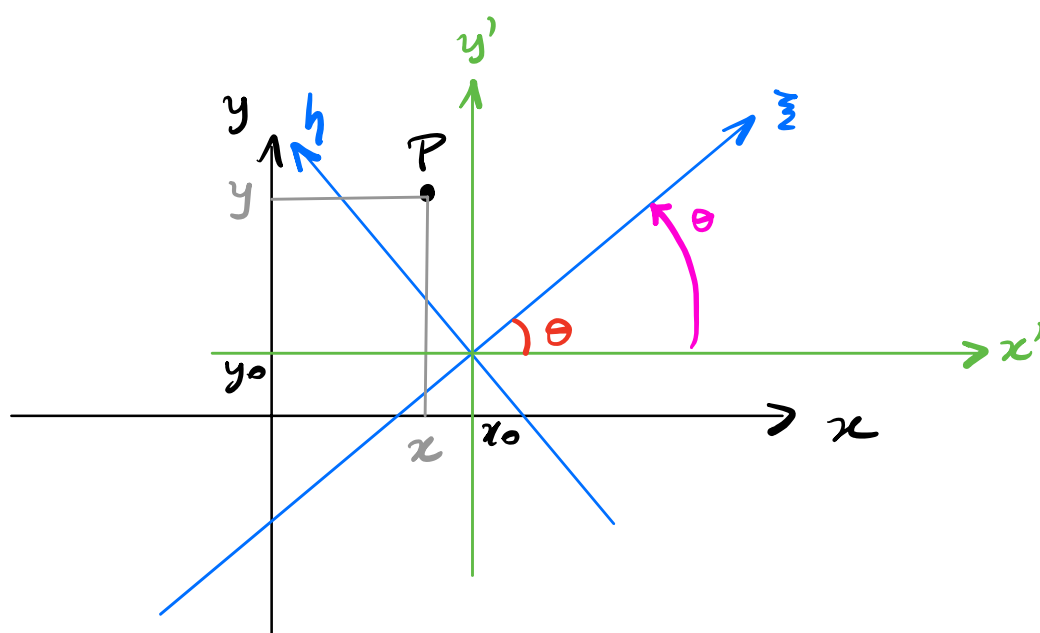
$$\xi = w + v = \frac{x \cos^2 \theta + y \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta}$$

$$= x \cos \theta + y \sin \theta$$

haz:

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta \\ \eta &= -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

3º CASO: TRANSLAÇÃO + ROTAÇÃO



- De xy para $x'y'$: translação (x_0, y_0)

$$x' = x - x_0$$

$$y' = y - y_0$$

- De $x'y'$ para $\xi\eta$: rotação (θ)

$$\xi = x' \cos \theta + y' \operatorname{sen} \theta$$

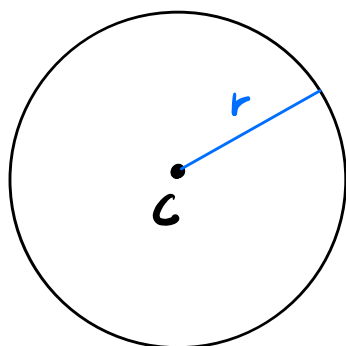
$$\eta = -x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta$$

Logo:

$$\xi = (x-x_0) \cos \theta + (y-y_0) \operatorname{sen} \theta$$

$$\eta = -(x-x_0) \operatorname{sen} \theta + (y-y_0) \cos \theta$$

EQUAÇÃO DO CÍRCULO



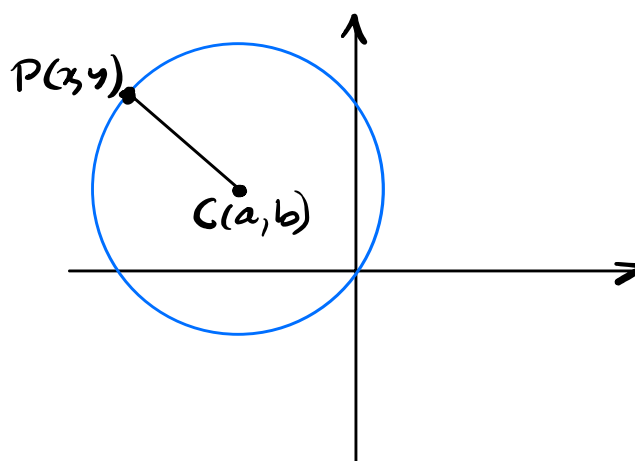
Círculo de raio r e centro C :

É o lugar geométrico dos pontos P tais que $\overline{PC} = r$.

No plano cartesiano:

$$d(P, C)^2 = r^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



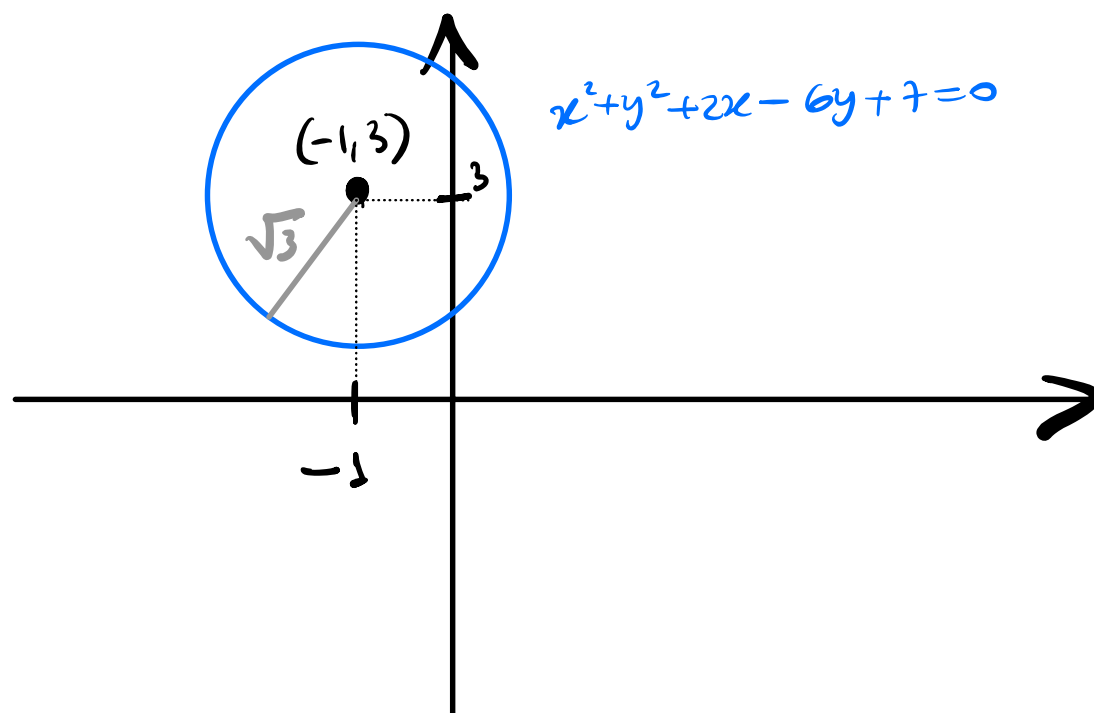
EXEMPLO: Represente no plano $\mathbb{R}^2$ o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0\}$$

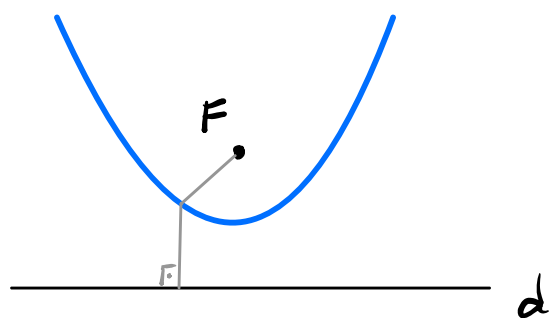
$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{3})^2$$

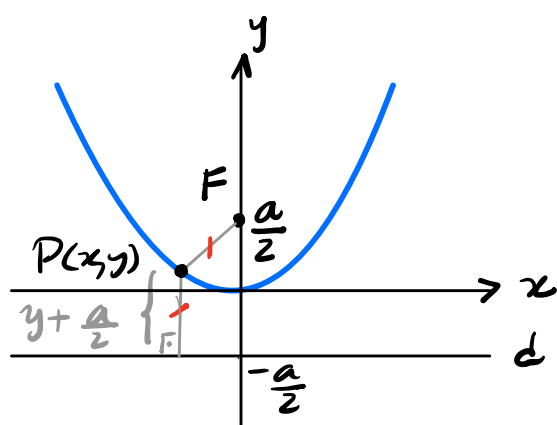


EQUAÇÃO DA PARÁBOLA



Dados reta d e $F \notin d$, a parábola de diretriz d e foco F é o conjunto dos pontos equidistantes de F e d

No plano cartesiano: $d = \{y = -\frac{a}{2}\}$, $F = (\frac{a}{2}, 0)$



$$y + \frac{a}{2} = \sqrt{x^2 + (y - \frac{a}{2})^2}$$

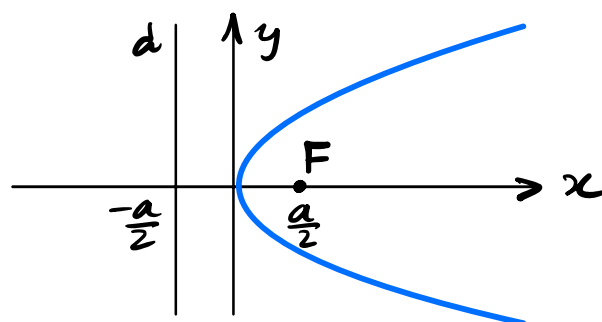
$$(y + \frac{a}{2})^2 = x^2 + (y - \frac{a}{2})^2$$

$$\cancel{y}^2 + a\cancel{y} + \frac{a^2}{4} = x^2 + \cancel{y}^2 - a\cancel{y} + \frac{a^2}{4}$$

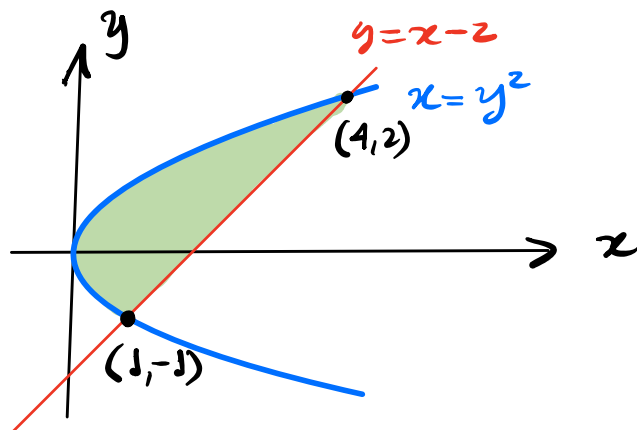
$$\Rightarrow y = \frac{1}{2a} x^2$$

OBS: Uma parábola com diretriz vertical tem equação

$$x = \frac{1}{2a} y^2$$



EXEMPLO: Esboce a região delimitada pela parábola $x = y^2$ e a reta $y = x - 2$



$$y^2 = y + 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2} = -1 \text{ ou } 2$$

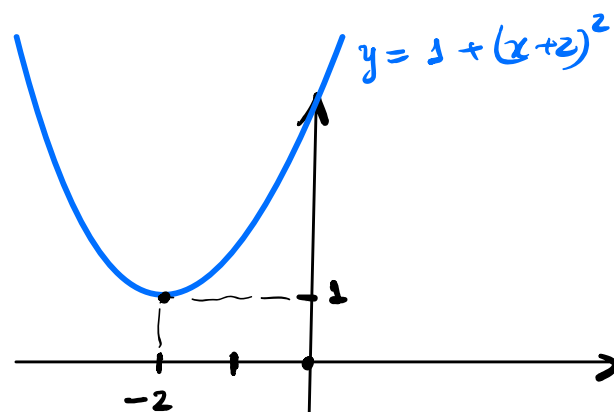
Interseções: $(1, -1)$ e $(4, 2)$

EXEMPLO: Esboce o gráfico da equação $x^2 + 4x - y + 5 = 0$

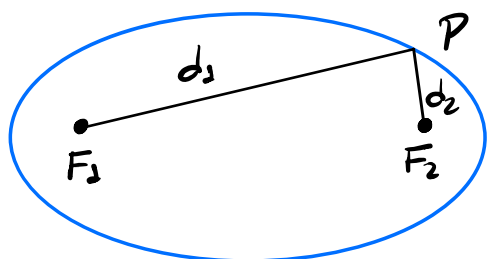
$$(x+2)^2 - 4 - y + 5 = (x+2)^2 + 1 - y = 0$$

$$\Rightarrow y - 1 = (x+2)^2 = (x - (-2))^2$$

É a eq. da parábola $y = x^2$ trasladada em $(-2, 1)$:



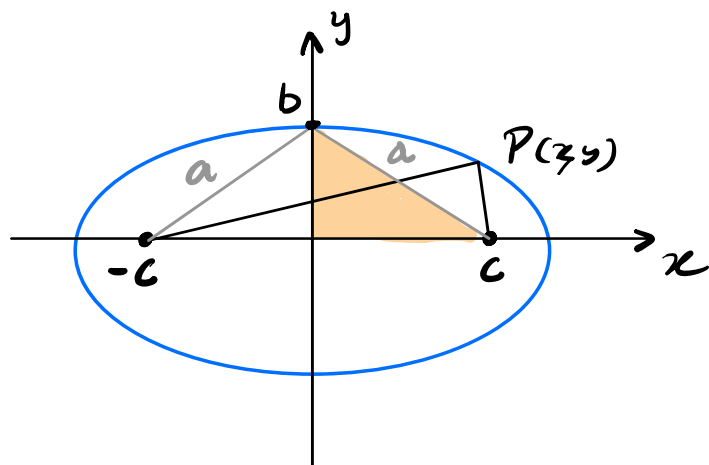
EQUAÇÃO DA ELIPSE



$$d_1 + d_2 \equiv K > \overline{F_1 F_2}$$

Dados $F_1 \neq F_2$ e $K > \overline{F_1 F_2}$, uma elipse com focos F_1 e F_2 é o lugar geométrico dos pontos P tais que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = K$.

No plano $\mathbb{R}^2$: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $K = 2a$



$$a^2 = b^2 + c^2 \\ \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\underbrace{(x+c)^2 + y^2}_{x^2 + 2xc + c^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \underbrace{(x-c)^2 + y^2}_{x^2 - 2xc + c^2}$$

$$\cancel{4a}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \cancel{4a^2} - \cancel{4cx}$$

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

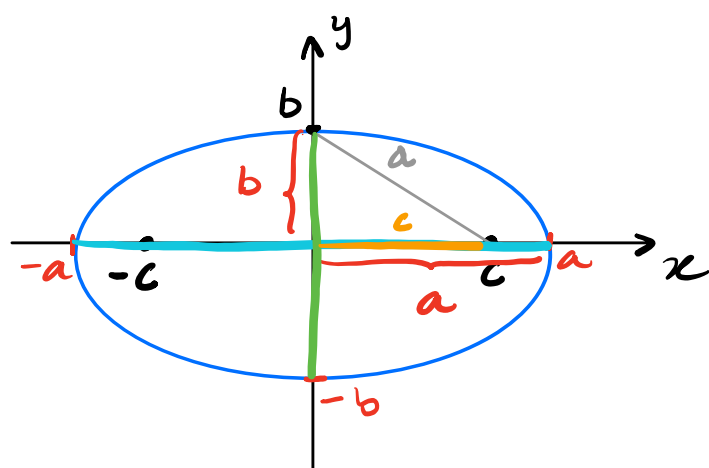
$$a^2 x^2 - 2a^2 c x + a^2 c^2 + a^2 y^2 = a^4 - 2a^2 c x + c^2 x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2 \cdot (a^2 - c^2)$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad (\div a^2 b^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Caracterização da elipse:



$$y = 0 \Rightarrow x = \pm a$$

distância focal: $2c$

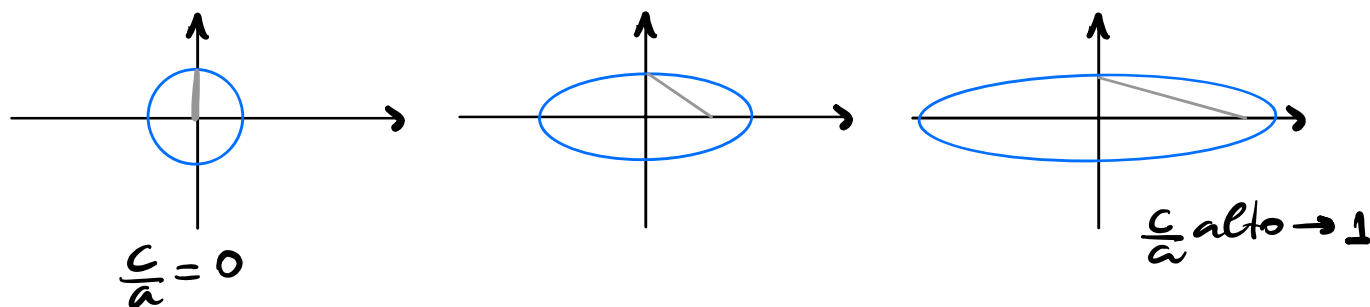
eixo maior: $2a$

eixo menor: $2b$

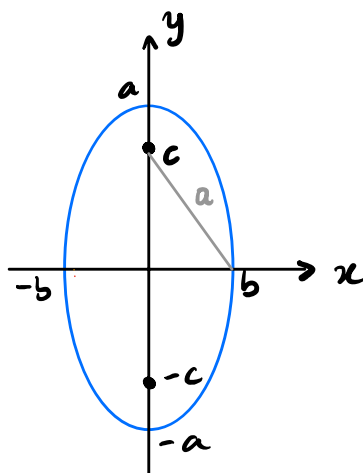
excentricidade: $\frac{c}{a}$

$$\frac{c}{a} \in [0, 1)$$

OBS: quanto maior a excentricidade, mais alongada é a elipse

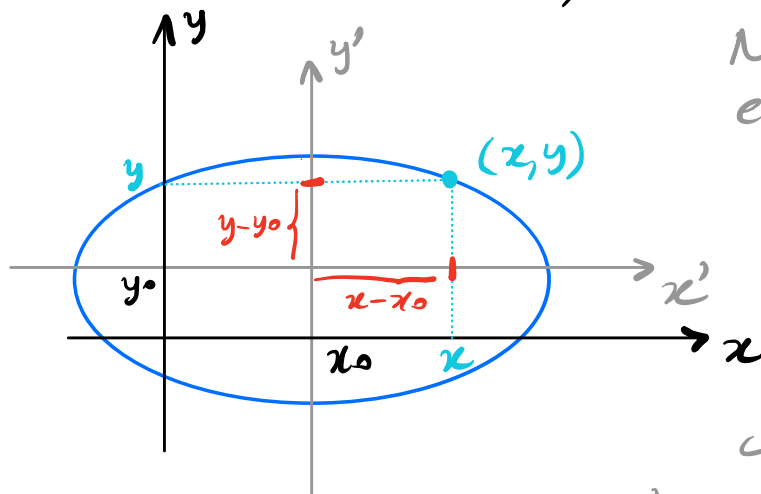


OBS: Poderíamos ter o eixo maior vertical:



Equação: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

EXEMPLO: Determine a equação da elipse com eixo maior horizontal $2a$, eixo menor $2b$ e centro (x_0, y_0) .



No sistema $x'y'$, a elipse tem equação

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

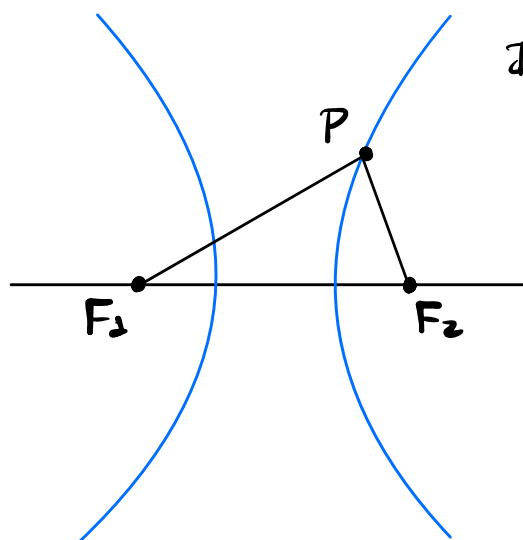
Mudando as coordenadas:

$$x' = x - x_0 \quad y' = y - y_0$$

Logo, a eq. da elipse no sistema xy é

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

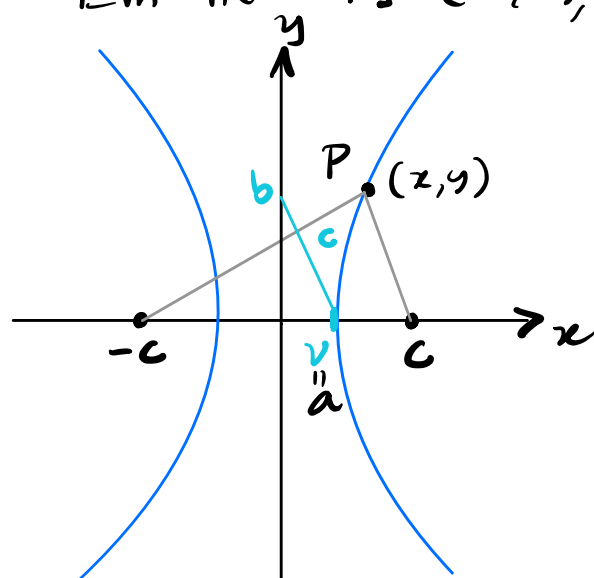
EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE



Dados $F_1 \neq F_2$ e $0 < K < |F_1 F_2|$, a Hipérbole com focos F_1, F_2 e eixo real K é o lugar geométrico dos pontos P tais que

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = K$$

Em $\mathbb{R}^2$: $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $K = 2a$



No vértice:

$$2a = c + v - (c - v) = 2v \Rightarrow v = a$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x+c)^2}_{x^2 + 2cx + c^2} + \cancel{y^2} = \underbrace{(x-c)^2}_{x^2 - 2cx + c^2} + \cancel{y^2} + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{4cx} - \cancel{4a^2} = \pm \cancel{4a} \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2$$

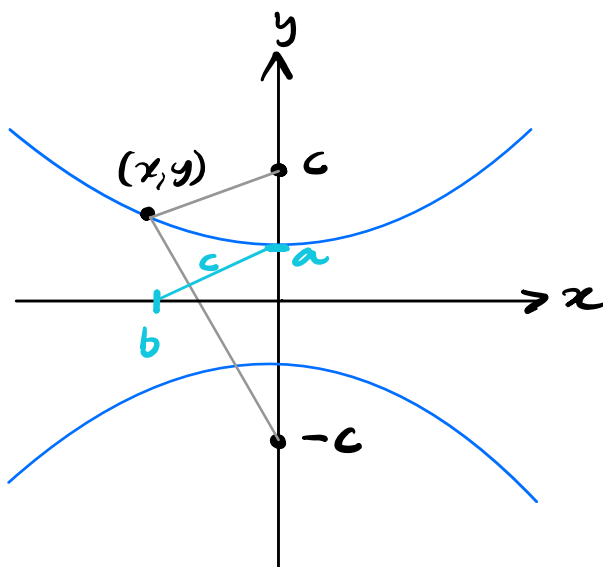
$$\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (\div a^2b^2)$$

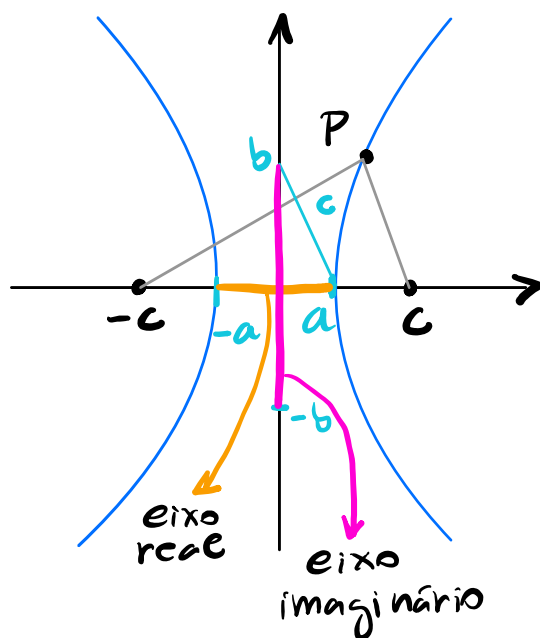
$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (\text{eq. da hipérbole na posição padrão})$$

OBS: A hipérbole com focos em Oy tem equação

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$



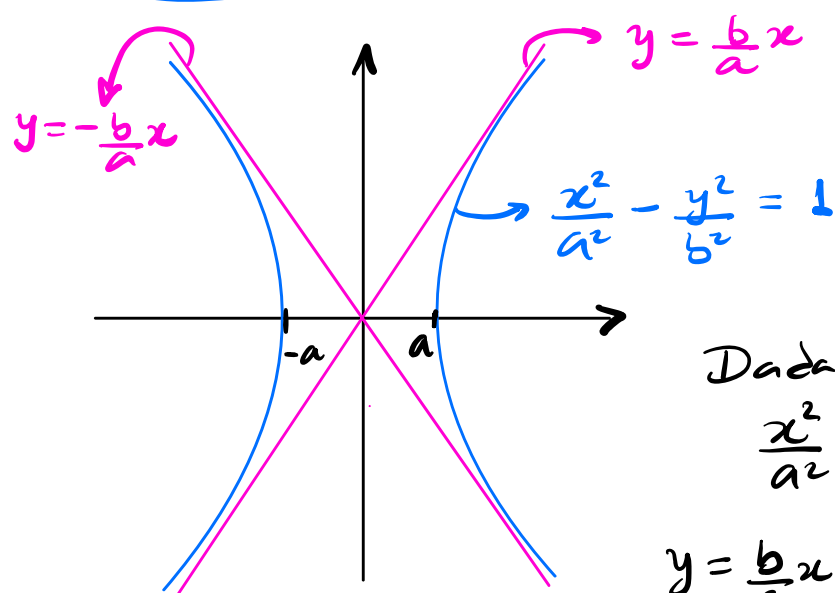
Caracterização da hipérbole



distância focal: $2c$
 eixo real: $2a$
 eixo imaginário: $2b$
 excentricidade: $\frac{c}{a}$

$$\frac{c}{a} \in (1, +\infty)$$

Assíntotas da hipérbole



Dada a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são
 suas retas assíntotas:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$$

Se $x \rightarrow +\infty$, no 1º Q $y \rightarrow +\infty$. Logo, é preciso que

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \rightarrow 0$$

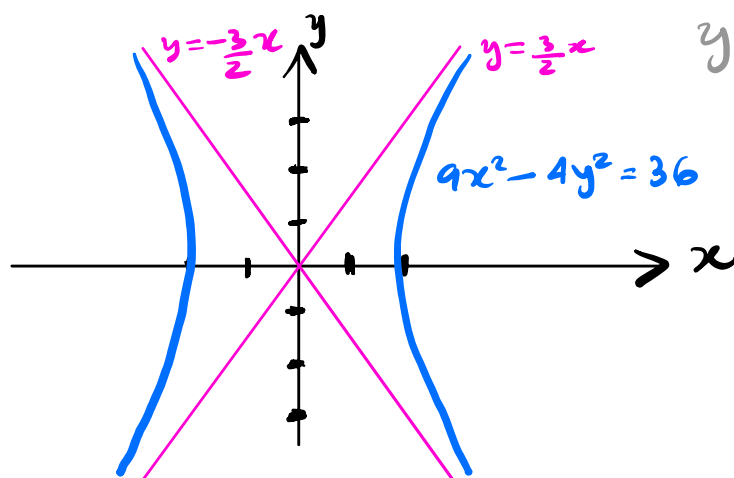
Ou seja: $y \approx \frac{b}{a}x$

Por outro lado, se $x \rightarrow +\infty$, no 4º Q $y \rightarrow -\infty$. Logo,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \rightarrow 0 \Rightarrow y \approx -\frac{b}{a}x$$

EXEMPLO: Esboce o gráfico de $9x^2 - 4y^2 = 36$.

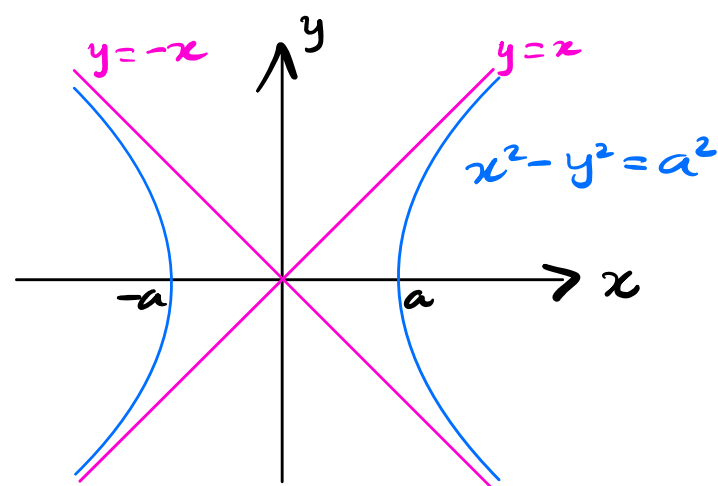
$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ é uma hipérbole com vértices $(\pm 2, 0)$ e assíntotas $y = \frac{3}{2}x$ e $y = -\frac{3}{2}x$.



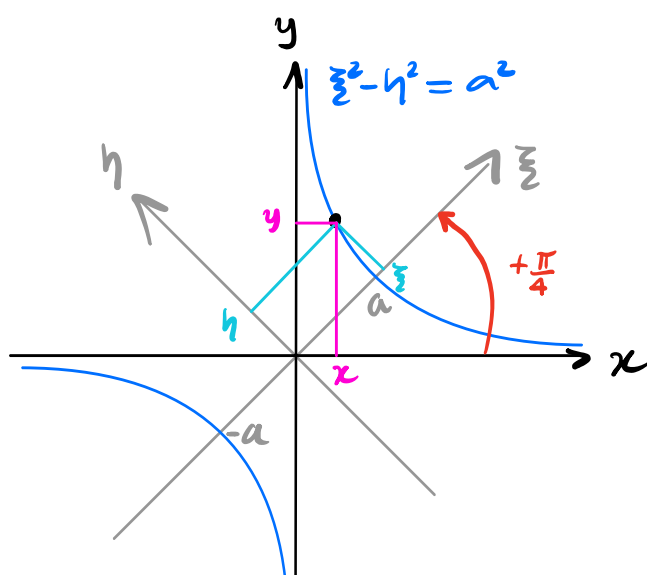
Hipérbole equilátera

É quando $a=b \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$

As assíntotas são $y = \pm x$



EXEMPLO: Determine a equação da hipérbole equilátera com assíntotas nos eixos coordenados.



No sistema $\xi\eta$, a hipérbole é

$$\xi^2 - \eta^2 = a^2$$

$O\xi$ é uma rotação de $+\frac{\pi}{4}$ de Ox . Logo, a mudança de coordenadas é

$$\xi = x \cos \frac{\pi}{4} + y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$$\eta = -x \sin \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

Logo:

$$\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(y-x)^2}{2} = a^2$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x^2} + 2xy + \cancel{y^2}}{2} - \frac{(\cancel{x^2} - 2xy + \cancel{y^2})}{2} = a^2$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cancel{4}xy}{\cancel{2}} = a^2 \Rightarrow xy = \frac{a^2}{2}$$

OBS: Em particular, $y = \frac{1}{x}$ é uma hipérbole equilátera rotacionada em 45°

